Tu bude kadečo, čo síce nepatrí do textu, ktorý by mal obsahovať len základ učiva, ale predsa len to bolo hodné (alebo aj nehodné) zapísania. Napríklad by tu mohli byť aj opravy nesprávnych viet a dôkazov uvedených v skriptách.

2 Diferencovateľnosť

Cauchyho vetu v podielovom tvare môžeme získať z tvaru $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$ jednoducho v prípade, že derivácie sú konečné. Ak nadobúda nekonečnú hodnotu vždy len jedna z nich, stále nie je problém, lebo v takomto bode by platilo ∞ =konečná hodnota, čiže takýto bod nie je bodom c vystupujúcim vo vete. Ak nadobúdajú obe súčasne nekonečnú hodnotu, stále môžeme analýzou znamienok vylúčiť ten prípad, kedy by sme dostali v takomto bode rovnosť $+\infty = -\infty$. Zostáva teda jediný prípad, kedy nemôžeme z tejto formulácie Cauchyho vety odvodiť tú, v ktorej vystupuje podiel. Problém je vlastne v tom, že nevieme, čomu sa rovná podiel ∞/∞.

Nasleduje kontrapríklad, ktorý ukazuje, že v takomto prípade veta neplatí. (Napríklad vo Venckových skriptách je však uvedené znenie, ktoré pripúšťa nekonečné derivácie a nehovorí nič o tom, že by nemali byť nekonečné súčasne, ak som to len náhodou neprehliadol.) Označme $f(x) = h^{-1}(x)$, kde $h(x) = x^3$ (čiže f je inverzná funkcia k x^3). Označme $g(x) = f(x) + \chi_{\langle 0, \frac{1}{2^3}\rangle}$. Uvažujme funkcie f a g na intervale $\langle a, b\rangle$, kde $a = -\frac{1}{2^3}$ a $b = \frac{1}{2^3}$. Platí $f(a) = g(a) = -\frac{1}{2}$, $f(b) = \frac{1}{2}$ a $g(b) = 1$. (Keď sa na to po čase pozerám, tak neviem, prečo som zvolil práve takéto hranice, ale čert ich ber.) Platí $\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{3}{2}$, ale $\frac{f'(c)}{g'(c)} = 1$ pre $c < 0$ a $\frac{f'(c)}{g'(c)} = 2$ pre $c > 0$. V bode nula ide o podiel ∞/∞. (Vidíme, že platnosť vety možno ľahko zachrániť, ak dodefinujeme $\infty/\infty = 3/2$;-)

Veľký význam to však asi nemá, určite sme používali túto vetu len pre funkcie s konečnými deriváciami.

5 Riemannov integrál

Iný dôkaz druhej vety o strednej hodnote integrálneho počtu:

Dôkaz.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \stackrel{?}{=} f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$$

Označme $A := \int_a^c g(x)dx$, $B := \int_c^b g(x)dx$. Máme:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = Af(a) + Bf(b)$$

$$\int_a^b g(x)dx = A + B$$

Odtiaľ vyjadríme $A = \frac{\int_a^b (f(x)-f(b))g(x)}{f(a)-f(b)}$. (Prípad $f(a) = f(b)$ treba vyšetriť zvlášť, ale ten je jednoduchý.) My potrebujeme ukázať, že existuje také $t \in \langle a, b\rangle$, že $G(t) = \int_a^t g(x)dx = A$.

Ak f je nerastúca, tak $0 \le f(x) - f(b) \le f(a) - f(b)$, a teda $G(a) \le A \le G(b)$. Zo spojitosti funkcie G (jedna z viet, ktoré sme brali pri Riemannovom integrále) máme potom existenciu t takého, že $G(t) = A$.

Pre neklesajúcu funkciu stačí zobrať $-f$. □

Podľa dôkazu sa zdá, že by stačilo $f(b) \le f(x) \le f(a)$, čo je slabšia podmienka ako monotónnosť.

10 Banachov a Hilbertov priestor

Hamelova báza

Dôkaz vety, ktorá hovorí, že ľubovoľné dve Hamelove bázy majú rovnakú kardinalitu sme robili na prednáške na dvakrát a dosť chaoticky, tak som sem dal jednoduchý dôkaz z [NS, cvičenie 4.7.7]. Je tu uvedený len nekonečnorozmerný prípad.

Dôkaz. Nech B_1, B_2 sú dve Hamelove bázy priestoru X. Pre každé $x \in B_1$ nech $B_2(x)$ je jednoznačne určená konečná množina bodov bázy B_2, ktorých lineárnou kombináciou je x. Najprv ukážeme, že pre každé $y \in B_2$ existuje také $x \in B_1$, že $y \in B_2(x)$.

Nech by to tak nebolo, teda $y \in B_2(x)$ pre žiadne x. Potom $B_1 \subseteq [B_2 \setminus \{y\}]$ ($[V]$ označuje lineárny obal množiny $V \subseteq X$). Keďže B_1 je báza, tak potom $[B_2 \setminus \{y\}] = X$, a teda y je lineárna kombinácia prvkov z $B_2 \setminus \{y\}$. Ukázali sme, že B_2 nie je lineárne nezávislá, čo je spor s predpokladom, že je to Hamelova báza.

Máme teda ukázané $(\forall y \in B_2)(\exists x \in B_1) y \in B_2(x)$. Platí potom $B_2 = \bigcup\limits_{x \in B_1} B_2(x)$. Pre kardinality dostávame $\operatorname{card} B_2 = \operatorname{card}(\bigcup\limits_{x \in B_1} B_2(x)) \leq \operatorname{card} B_1 . \aleph_0 = \operatorname{card} B_1$ (v poslednej rovnosti sme využili, že $\operatorname{card} B_1$ je nekonečná.) Rovnakým spôsobom ako $\operatorname{card} B_2 \leq \operatorname{card} B_1$ môžeme ukázať nerovnosť $\operatorname{card} B_1 \leq \operatorname{card} B_2$. Z týchto dvoch nerovností (podľa Cantor-Bernsteinovej vety) dostaneme $\operatorname{card} B_2 = \operatorname{card} B_1$. □

Von Neumannova veta

Pekný dôkaz von Neumannovej vety, vraj to vymyslel nejaký študent a voľajako sa to dostalo aj ku mne:

Dôkaz. Z predpokladov vety vyplýva, že $f(x) = Ax + y$ je kontraktívne zobrazenie. Z Banachovej vety o pevnom bode potom vyplýva, že existuje (pre ľubovoľné y) jediné x také, že $x = Ax + y$, t.j. $(I - A)x = y$.

Máme teda existenciu inverzného zobrazenia k $I - A$, zostáva overiť jeho spojitosť a odhad pre normu: $x = Ax + y \Rightarrow \|x\| \leq \|Ax\| + \|y\| \leq \|A\|\|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x\|(1 - \|A\|) \leq \|y\| \Rightarrow \|x\| \leq \frac{\|y\|}{1-\|A\|}$ □

Rovnobežníkové pravidlo

Obrátenie rovnobežníkového pravidla

Dôkaz. Ukážeme, že $(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$ je skalárny súčin. Vlastnosti $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ a $(x, y) = (y, x)$ sú zrejmé. Treba teda už len ukázať $(x+y, z) = (x, z)+(y, z)$ a $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

$$(x+y, z) = \frac{\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2}{4} = \frac{\|x + y + z\|^2 + \|z\|^2 - (\|x + y - z\|^2 + \|z^2\|)}{4} =$$
$$\frac{\|x + y + 2z\|^2 + \|x + y\|^2 - (\|x + y - 2z\|^2 + \|x + y\|^2)}{8} = \frac{\|x + y + 2z\|^2 - \|x + y - 2z\|^2}{8}$$

$$(x,z)+(y,z)=\frac{\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-(\|x-z\|^2+\|y-z\|^2)}{4}=$$
$$\frac{\|x+y+2z\|^2+\|x-y\|^2-(\|x+y-2z\|^2+\|x-y\|^2)}{8}=\frac{\|x+y+2z\|^2-\|x+y-2z\|^2}{8}$$

Tým máme $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$. Tiež platí $(x,-y)=(-x,y)=-(x,y)$. Na základe toho ľahko indukciou ukážeme $(nx,y)=n(x,y)$ pre $n\in\mathbb{Z}$. Jednoducho sa to rozšíri aj na racionálne čísla: $q(\frac{p}{q}x,y)=(px,y)=p(x,y)\Rightarrow(\frac{p}{q}x,y)=\frac{p}{q}(x,y)$. Z racionálnych čísel na reálne to môžeme rozšíriť limitným prechodom. (Norma je spojité zobrazenie.) □

15 Cauchyho úloha

Jednoznačnosť riešenia Cauchyho úlohy pre vlnovú rovnicu

Je to podobný dôkaz ako na prednáške, ale snažil som sa ho písať jednoduchšie. Preto to aj dokazujem len v jednorozmere, a potom sa pokúsim naznačiť, ako by to šlo vo viacrozmere. (Samozrejme, mohol by som to písať celé v n-rozmere, ale to by sme sa iba zbytočne ubili.)

K takémuto druhu dôkazov sa zvykne kresliť aj obrázok. Tak si ho nakreslite.

Dôkaz. Základná myšlienka dôkazu je presne rovnaká ako na prednáške – budeme sa snažiť dokázať, že vo vrchole každého charakteristického kužeľa je u nulové.

Z_r je v jednorozmernom prípade trojuholník. Parametrizácie jeho dvoch strán, na ktorých u môže byť nenulové, sú
$(t,x)=(\tau,r-\tau)$, $\tau\in\langle 0,r\rangle$ (úsečka u_1),
$(t,x)=(\tau,\tau-r)$, $\tau\in\langle 0,r\rangle$ (úsečka u_2).
Vyjadríme deriváciu zúženia u na tieto úsečky podľa parametra τ. Pre $f(\tau)=u(\tau,r-\tau)$ a $g(\tau)=u(\tau,\tau-r)$ máme $f'(\tau)=u_t(\tau,r-\tau)-u_x(\tau,r-\tau)$ a $g'(\tau)=u_t(\tau,\tau-r)+u_x(\tau,\tau-r)$.
Nás zaujíma hodnota u vo vrchole Z_r, čiže $u(r,0)$.
$u(r,0)=f(r)=\int_0^r f'(\tau)d\tau=\int_0^r u_t(\tau,r-\tau)-u_x(\tau,r-\tau)d\tau$
$u(r,0)=g(r)=\int_0^r g'(\tau)d\tau=\int_0^r u_t(\tau,\tau-r)+u_x(\tau,\tau-r)d\tau$
Jednotkový vektor vonkajšej normály je $\nu_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ na úsečke u_1 a $\nu_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ na úsečke u_2. Ak položíme $w(t,x)=(u_t,-u_x)$, tak vidíme, že $u(r,0)=\sqrt{2}\int\limits_{u_1} w.\vec{\nu}_1=\sqrt{2}\int\limits_{u_2} w.\vec{\nu}_2$.
Keďže na podstave je $w=0$, tak $2u(r,0)=\sqrt{2}\int\limits_{\partial Z_r} w.\vec{n}ds$. Môžeme použiť vetu o divergencii a dostaneme $\sqrt{2}u(0,r)=\int\limits_{Z_r}\operatorname{div} w dS=\int\limits_{Z_r}(u_{tt}-u_{xx})dS=0$. □

Myslím, že analogicky by to išlo aj vo viacrozmere. (Je predsa neprirodzené, aby to tam neplatilo, keď to v jednorozmere platí.) Postupoval by som asi takto:

Teraz uvažujeme $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$. Každá povrchová úsečka kužeľa Z_r je určená nejakým bodom z okraja podstavy (ktorý je $(n-1)$-rozmerná guľa) x_0. Nech $\vec{u_0}=\frac{x_0}{\|x_0\|}$. Tentokrát zvolíme takúto parametrizáciu:
$(x,t)=(r-(r-\tau)^n,\vec{u_0}(r-\tau)^n)$
$f(\tau)=u(r-(r-\tau)^n,\vec{u_0}(r-\tau)^n)$
$f'(\tau)=n(r-\tau)^{n-1}(u_t-\vec{u_0}.\operatorname{grad}u)$
$u(r,0)=\int\limits_0^r n(r-\tau)^{n-1}(u_t-\vec{u_0}.\operatorname{grad}u)d\tau$
Keď uvedenú rovnosť zintegrujeme cez všetky $\vec{u_0}$, ktoré prebiehajú $(n-1)$-rozmernú guľu, dostaneme

$Ku(r,0) = \int\limits_{\partial Z_r} (u_t - \vec{u_0} \operatorname{grad} u) dS,$
lebo $(r-\tau)^{n-1} dS_{n-1} d\tau$ nám dá (až na konštantu) dS. (To by sa malo dať overiť pomocou parametrizácie kužeľa. A toto je práve dôvod, prečo sme museli zvoliť takúto parametrizáciu povrchovej úsečky, ak sme chceli nakoniec dostať plošný integrál po kuželi.) Teraz je $w = (u_t, -\operatorname{grad} u)$. (Pri podrobnom dôkaze by bolo ešte treba zistiť jednotkový vektor vonkajšej normály, nám však stačí, keď z obrázku vidíme, že to bude $(1, \vec{u_0})$ po predelení jeho normou.) Pomocou vety o divergencii dostaneme objemový integrál z $\operatorname{div} w = u_{tt} - \triangle u$ (resp. jeho násobok).

Literatúra

[NS] A.Naylor,G.Sell: *Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách*