A

1. Nech $f\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte
a) $\operatorname{Ker} f^2 \supseteq \operatorname{Ker} f$,
b) $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$,
c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \supseteq \operatorname{Im} f$.

2. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$.

3. Určte hodnosť matice $A = \begin{pmatrix} c & c+1 & c-2 \\ c & 2-2c & 1 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$.

4. Nájdite (aspoň jedno) lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^4$ (ak také existuje), pre ktoré: $f(1,2,3,1) = (1,3,1,0)$, $f(2,1,3,0) = (0,1,3,1)$, $f(3,2,1,0) = (1,0,3,0)$ a $f(2,2,3,4) = (3,1,0,4)$.

B

1. Dokážte, že $h(A^T A) = h(A)$ pre ľubovoľnú maticu typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$. (Hint 1: Možno pomôže, ak si uvedomíte, že v $\mathbb{R}^n$ platí $\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$. Hint 2: Iná možnosť je skúsiť to najprv dokázať pre RTM. Hint 3: Ak vymyslíte úplne iné riešenie, nedajte sa zviesť zo stopy predchádzajúcimi dvoma hintami.)

2. Vypočítajte (nad $\mathbb{R}$)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia (prosté zobrazenie).

4. Nájdite (aspoň jedno) lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ak také existuje), pre ktoré: $f(3,2,3) = (5,-3,-2)$, $f(0,2,1) = (2,0,-2)$, $f(3,0,3) = (3,-3,0)$.

C

1. Nech $f\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie a $g\colon V \to V$ je určené predpisom $g(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} - f(\vec{\alpha})$ (inak povedané, $g = id_V - f$). Dokážte:
a) Zobrazenie g je lineárne.
b) Ak $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$, tak $f \circ f = f$. (Zobrazenie s takouto vlastnosťou sa zvykne nazývať *projekcia.*)

2. Dokážte, že každá štvorcová matica sa dá zapísať ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice. (Maticu voláme *symetrická,* ak $A = A^T$, a *antisymetrická,* ak $A = -A^T$.)

3. V priestore $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uvažujme vektory $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$, $g(x) = 1$, $h(x) = \cos x$. Zistite, či f, g, h sú v tomto priestore lineárne nezávislé.

4. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

D

1. Ak A je štvorcová matica typu $n \times n$ tak $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (teda súčet prvkov matice na diagonále) sa nazýva *stopa* matice A. Dokážte, že $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

2. Dokážte: Ak $(G, *)$ je grupa, e je jej neutrálny prvok a pre ľubovoľné $x \in G$ platí $x * x = e$, tak grupa G je komutatívna.

3. Zistite dimenziu a bázu podpriestorov $S + T$ a $S \cap T$, kde S a T sú vektorového priestoru $\mathbb{Z}_5^4$ určené nasledovne: $S = [(1,2,3,4), (3,2,1,0), (1,3,0,2)]$ a $T = [(1,1,1,1), (1,1,0,0), (0,0,1,1)]$.

4. Vypočítajte (nad poľom $\mathbb{R}$) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$