E

1. Uvažujme priestor $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ako podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Definujme lineárne zobrazenie $g\colon V \to V$ ako $g\colon f \mapsto f'$ (derivácia). Zistite, čomu sa rovná $\operatorname{Ker} g$ a $\operatorname{Im} g$. Určte ich dimenzie.

2. Nájdite lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^4$ také, že $\operatorname{Ker} f = [(3,2,1,4),(2,3,5,1)]$, $\operatorname{Im} f = [(2,4,6,1),(3,5,1,2)]$ a $f(3,3,5,1) = (5,2,0,3)$. (Ak také zobrazenie neexistuje, zdôvodnite prečo.)

3. Vypočítajte (nad $\mathbb{R}$) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

4. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \le h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.

F

1. Dokážte: $h(A+B) \le h(A) + h(B)$. Ukážte na príklade, že môže nastať ostrá nerovnosť. (Hint: Súvisia riadky matice $A+B$ nejako s lineárnym súčtom podpriestorov?)

2. Dokážte: Nech $f\colon X \to Y$ a $g, h\colon Y \to Z$. Ak f je injekcia a $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.

3. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$

$$\begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}$$

4. Nech $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1,2,3,1) = (2,0,1,0)$, $f(0,2,3,1) = (1,2,0,3)$, $f(1,0,3,4) = (3,2,1,0)$, $f(4,1,3,2) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1}.