Cvičenie 1 – grupy, podgrupy

1. Nech $(G, *)$ je grupa. Dokážte:
   a) $x * y = y * x \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$.
   b) Ak $x * x = e$ pre všetky $x \in G$, tak G je komutatívna.

2*. Nech $*$ je asociatívna binárna operácia na množine $G \neq \emptyset$. Nech pre každé $a, b \in G$ majú rovnice $a * x = b$, $y * a = b$ riešenia v G. (Inými slovami, pre každé $a, b \in G$ existujú $x \in G$ a $y \in G$ také, že $a * x = b$, $y * a = b$.) Dokážte, že $(G, *)$ je grupa. (Hint: Skúste začať dôkazom existencie ľavého a pravého neutrálneho prvku.)

3. Nech $(G, \cdot)$ je grupa a $P(G)$ je systém všetkých podmnožín G. Dokážte, že operácia $\cdot$ na množine $P(G)$ daná predpisom

$$A \cdot B = \{a \cdot b; a, b \in G\}$$

   je asociatívna. Tvorí $P(G) \setminus \{\emptyset\}$ s touto operáciou grupu?

4*. Každá konečná grupa s párnym počtom prvkov obsahuje prvok x taký, že $x = x^{-1}$.

5. Ak $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$ sú grupy, tak aj $G \times H$ s operáciou $(a, b) * (a', b') = (a *_G a', b *_H b')$ je grupa.

6. Nájdite všetky podgrupy $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$.

7. Matice typu $n \times n$, ktorých determinant je rovný 1, s operáciou násobenia matíc tvoria grupu.