Cvičenie 2 – Podrupy

Na pripomenutie:

Nech $(G, *)$ je grupa a $H \subseteq G$ je ľubovoľná podmnožina G. Hovoríme, že H je *podgrupa* grupy G, ak H s binárnou operáciou $*$ zúženou na podmnožinu H tvorí grupu.

Ak $H \neq \emptyset$, tak H je podgrupa $\Leftrightarrow$ $(\forall a, b \in H)\ a * b \in H \wedge a^{-1} \in H$ (uzavretosť na operáciu $*$ a inverzné prvky) $\Leftrightarrow$ $(\forall a, b \in H)\ a^{-1}b \in H$.

1. Dokážte: Ak H je podgrupa grupy $(G, \cdot)$ tak $H^2 = H \cdot H \subset H$. (Tu $\cdot$ označuje binárnu operáciu na $P(G)$, ktorú sme definovali na predošlom cvičení, t.j. $A \cdot B = \{a \cdot b; a \in A, b \in B\}$ pre ľubovoľné $A, B \subset G$.)

2. Ak A, B, C sú podgrupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

3. Tvoria pri sčitovaní/násobení matíc grupu štvorcové matice $n \times n$, ktoré sú: symetrické, antisymetrické, diagonálne, regulárne, horné trojuholníkové... (V princípe si môžete vymyslieť čokoľvek zmysluplné, bolo by však dobre pre obe operácie nájsť aspoň po jednom príklade, kedy to nie je grupa a po jednom príklade kedy to grupa je. V oboch prípadoch nám stačí overovať kritérium podgrupy namiesto celej definície grupy.)

4. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

5. Matice typu $n \times n$, ktoré v každom riadku a každom stĺpci majú práve jednu jednotku a ostatné prvky sú nulové, s operáciou násobenia matíc tvoria grupu.

6. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

7. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (súčin dvoch grúp sme definovali na minulom cvičení) a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Z toho, čo sa naučíme neskôr – pravdepodobne na najbližšej prednáške – sa na základe tejto úvahy bude dať zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné.)

8. Dokážte, alebo vyvráťte: Ak H_1 je podgrupa G_1 a H_2 je podgrupa G_2, tak $H_1 \times H_2$ je podgrupa $G_1 \times G_2$.

9. Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Je aj každá podgrupa grupy $(V, +)$ podpriestorom priestoru V? Ako je to s vektorovými priestormi nad poľom $\mathbb{Z}_p$?