Cvičenie 4

Permutácie

Na pripomenutie: Každú permutáciu vieme (jednoznačne) rozložiť na disjunktné cykly, z tohoto rozkladu vieme zistiť jej rád a paritu. Pre cykly ľahko vieme vyrátať inverznú permutáciu: $(1324)^{-1} = (4231)$.
Každý cyklus možno zapísať viacerými spôsobmi: $(1324) = (3241) = (2413) = (4132)$.

Disjunktné permutácie (a teda aj disjunktné cykly) komutujú.

Permutácie vieme rozložiť aj na transpozície. Cykly vieme rozložiť napríklad takto:
$(a_1a_2\dots a_n) = (a_1a_n)(a_1a_{n-1})\dots(a_1a_2)$ alebo $(a_1a_2\dots a_n) = (a_{n-1}a_n)\dots(a_2a_n)(a_1a_n)$
Permutácia je *párna* $\Leftrightarrow$ má párny počet inverzií $\Leftrightarrow$ dá sa rozložiť na párny počet permutácií. Pri skladaní permutácií sa parita permutácií správa podobne ako parita celých čísel pri sčítovaní.

1. V tomto cvičení budeme pracovať s permutáciami množiny $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (čiže prvkami grupy S_8) a budeme zadané permutácie aj výsledky vždy zapisovať ako súčiny disjunktných cyklov: Označme
   $\varphi = (14)(235)(78)$
   $\psi = (234)(67)$
   $\tau = (135)(24)(68)$
   a) Vypočítajte $(\varphi \circ \psi) \circ \tau$ a $\varphi \circ (\psi \circ \tau)$
   b) Ku každej z uvedených permutácií vypočítajte inverznú permutáciu.
   c) Zistite rád a paritu permutácií φ, ψ, τ a aj permutácií, ktoré sme dostali ako výsledky v predchádzajúcich častiach tejto úlohy.

2. Pre dané permutácie určte rád, paritu, a rozklad na disjunktné cykly:
   $\varphi = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{smallmatrix}\right)$, $\tau = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{smallmatrix}\right)$, $\psi = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{smallmatrix}\right)$.
   Ďalej vypočítajte permutácie $\varphi\tau\psi$, φ^{-1}, τ^{-1}, ψ^{-1}.

3. Vypočítajte $\varphi \circ \psi$ a $\psi \circ \varphi$ pre:
   a) $\varphi = (14)(5678)$, $\psi = (23)(5678)$
   b) $\varphi = (124)(5678)$, $\psi = (23)(5678)$.
   Je niektorý z týchto prípadov príkladom nedisjunktných permutácií, ktoré komutujú?

4. Ak počet inverzií permutácie $\left(\begin{smallmatrix}1&2&\cdots&n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{smallmatrix}\right)$ je k, zistite počet inverzií permutácie $\left(\begin{smallmatrix}1&2&\cdots&n\\a_n&a_{n-1}&\cdots&a_1\end{smallmatrix}\right)$.

5. Dokážte, že grupa S_n je generovaná:
   a) Množinou všetkých transpozícií.
   b) Množinou transpozícií $\{(12),(13),\dots,(1n)\}$.
   c) Množinou transpozícií $\{(12),(23),\dots,(n-1,n)\}$.
   d) Transpozíciou (12) a cyklom $(12\dots n)$. (Hint: Skúste vyrátať $(12\dots n)^{-k}(12)(12\dots n)^k$.)

6. Dokážte, že alternujúca grupa A_n je generovaná:
   a) Množinou všetkých cyklov (ijk) dĺžky 3.
   b) Množinou cyklov dĺžky 3 tvaru $(123), (124), \dots, (12n)$.

7. * Koľko permutácií z grupy S_n má rád 2?

Cyklické grupy II

1. Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre každé $k \mid n$ existuje k-prvková podgrupa grupy $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$.

2. Izomorfizmus grupy G na samú seba voláme *automorfizmus.* Dokážte, že:
a) Množina $\mathrm{Aut}\, G$ všetkých automorfizmov grupy G je grupou transformácií.
b) Definujeme pre ľubovoľné $a \in G$ zobrazenie $f_a\colon G \to G$ ako $f_a(g) = aga^{-1}$. Potom platí $f_{ab} = f_a \circ f_b$ pre ľubovoľné $a, b \in G$.
c) Pre každé $a \in G$ je zobrazenie f_a automorfizmus grupy G (takýto automorfizmus nazveme vnútorný).
d) Množina $\mathrm{VAut}\, G$ všetkých vnútorných automorfizmov grupy G je grupou transformácií.
e) Grupa G je komutatívna práve vtedy, keď množina $\mathrm{VAut}\, G$ všetkých jej vnútorných automorfizmov je jednoprvková.
f) Zobrazenie $a \mapsto f_a$ je surjektívny homomorfizmus z G na $\mathrm{VAut}\, G$. Nájdite jadro tohoto automorfizmu.

3. V každej grupe majú nasledujúce prvky rovnaký rád: x a yxy^{-1}; ab a ba; abc, bca a cab. Naopak, prvky abc a cba môžu mať rôzny rád. (Hint: Jedna možnosť ako dokázať, že dva prvky $g, h \in G$ majú rovnaký rád je dokázať ekvivalenciu $x^n = e \Leftrightarrow y^n = e$. Iná možnosť je nájsť izomorfizmus $f\colon G \to G$ taký, že $f(g) = h$, a použiť fakty, že izomorfizmy zachovávajú rád prvkov.)

4. Nech $a, b \in G$, kde G je grupa, $a, b \neq 1$ také, že $ab = ba$ a $b^3 = 1$. Dokážte, že $\{a^n, ba^n, b^2a^n; n \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa grupy G.

5. Ak rád prvku a v grupe G je n a e je neutrálny prvok tejto grupy, tak pre prirodzené čísla $k \in \mathbb{N}$ platí $a^k = e$ práve vtedy, keď $n \mid k$. Ďalej pre každé $s \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $a^s = a^m$ a $0 \leq m \leq m - 1$.