Cvičenie 6

Faktorové grupy

Veta o izomorfizme: Ak $f\colon G \to G'$ je homomorfizmus grúp, tak $\operatorname{Ker} f$ je normálna podgrupa grupy G a faktorová grupa $G/\operatorname{Ker} f$ je izomorfná s podgrupou $\operatorname{Im} f$ grupy G'.

1. Nech G je grupa všetkých regulárnych matíc typu $n \times n$ (s operáciou násobenia matíc). Ako H označme tie z nich, ktoré majú determinant $|A| = 1$. Dokážte, že H je invariantná podgrupa G! Vedeli by ste nájsť grupu izomorfnú s G/H?

2. Overte, či H je normálna podgrupa grupy G a opíšte faktorovú grupu G/H (aké má triedy, vybrať z každej triedy práve jedného reprezentanta, zistiť, či je izomorfná s nejakou známou grupou).
   a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$
   b) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$
   c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$
   d) $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$, $H = [(2, 2)]$
   e) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = \{(n, m, 0); n, m \in \mathbb{Z}\}$
   f) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}; c^6 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

3. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$
   a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S
   b) $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$, $S/\mathbb{C}_n$, S
   c) $(C \setminus \{0\}, \cdot)$, $(C \setminus \{0\}, \cdot)/C_n$
   d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
   e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
   f) C_{12}/C_4, $\mathbb{Z}_3$
   g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, $\mathbb{Z}_3$
   h) $S_3/[(123)]$, $(\mathbb{Z}_2, +)$

4. Ukážte, že $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (obe grupy berieme so sčitovaním) je nekonečná grupa, v ktorej má každý prvok konečný rád.

5. Nech $\varphi\colon G \to G/H$ je kanonický homomorfizmus a $X \subset G$. Dokážte: Ak $\varphi[X]$ generuje G/H, tak $H \cup X$ generuje G.

6. Centrom grupy G nazývame množinu $Z(G) = \{g \in G; (\forall h \in G) gh = hg\}$ takých prvkov, ktoré komutujú so všetkými prvkami G. Ukážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa grupy G.