

Cvičenie 7

Okruhy

1. Zistite (a svoje tvrdenie zdôvodnite) ktoré z uvedených vlastností sa z okruhu R prenesú na uvedené konštrukcie:

	$R \times R$	R/I	R^I	podokruh	homomorfný obraz
pole					
obor integrity					
nemá delitele nuly					
má delitele nuly					
komutatívny okruh					
okruh s jednotkou					

2. Ak R je obor integrity a $x^2 = 1$, tak $x = 1$ alebo $x = -1$.
3. Dokážte, že $\{(r, r); r \in R\}$ je podokruh okruhu $R \times R$. Je tento podokruh izomorfný s okruhom R ?
4. Zistite, ktoré z nasledujúcich zobrazení sú homomorfizmy medzi okruhom A všetkých matíc typu 2×2 s celočíselnými koeficientami a okruhom \mathbb{Z} .
- a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$
- b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$ (stopa matice)
- b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ (determinant matice)
5. Dokážte, že okruhy $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie sú izomorfné.
6. Prienik ľubovoľného systému podokruhov je podokruh. Prienik ľubovoľného systému ideálov je ideál.
7. Nech $X \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina. Dokážte, že potenčná množina $(P(X), \Delta, \cap)$ s operáciami Δ (symetrická diferencia množín) a \cap (prienik množín) tvorí okruh. Nájdite izomorfizmus medzi týmto okruhom a okruhom \mathbb{Z}_2^X . (Poznámka: Bijekcia, ktorú nájdete v druhej časti, by sa dala použiť aj na dôkaz tvrdenia uvedeného v prvej časti.)