Cvičenie 9

Okruhy, ideály

1. Zistite, či dané ideály v okruhu $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$ (s obvyklým sčitovaním a násobením komplexných čísel) sú maximálne ideály/prvoideály.
   a) $(1 + i) = \{(1 + i)z; z \in \mathbb{C}\}$
   b) $(2) = \{2z; z \in \mathbb{C}\}$
   c*) $(2 + i) = \{(2 + i)z; z \in \mathbb{C}\}$

2. Ak I_1, I_2 sú ideály v okruhu $(R, +, \cdot)$, tak aj
   a) $I_1 + I_2 = \{a + b; a \in I_1, b \in I_2\}$ je ideál v R.
   b) $I_1.I_2 = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n; n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in R\}$ je ideál v R.

3. Nech $(G, *)$ je cyklická grupa, a je jej generátor, t.j. $G = [a]$. Ak definujeme operáciu $\cdot$ ako $a^k \cdot a^l = a^{k.l}$ (pre ľubovoľné $k, l \in \mathbb{Z}$), tak $(G, *, \cdot)$ je okruh. Viete povedať (v závislosti od rádu generátora a) s akým okruhom je tento okruh izomorfný?

4. Dokážte, že ak R' je komutatívny okruh s jednotkou, R je nejaký jeho podokruh, ktorý obsahuje jednotku, a $x \notin R'$. Dokážte, že najmenší podokruh okruhu R' obsahujúci $R \cup \{x\}$ pozostáva práve z prvkov tvaru $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, kde $a_i \in R$.

Okruhy polynómov

1. Dokážte, že zvyšok polynómu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in F[x]$ po delení $x - b$ je práve $f(b)$ (=jeho hodnota v bode $b \in F[x]$).

2. Vydeľte dané polynómy so zvyškom v $\mathbb{C}[x]$.
   a) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x + 2$, $g(x) = x^2 + x - 2$
   b) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 4$, $g(x) = x^3 + x + 1$
   c) $f(x) = x^3 + (2 + 2i)x^2 + 3ix + 1$, $g(x) = x^2 + (2 + i)x + i$

3. Použitím Hornerovej schémy[1] zistite, či c je koreň polynómu $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ a vyjadrite tento polynóm v tvare $f(x) = g(x)(x - c) + f(c)$.
   a) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x + 2$, $c = -2$
   b) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 4$, $c = -1$
   c) $f(x) = x^3 + (2 + 2i)x^2 + 3ix + 1$, $c = -i$

4. Pomocou Hornerovej schémy vyjadriť:
   a) $f(x + 3)$ pre $f(x) = x^4 - x^3 + 1$
   b) $(x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$

5. * Dokážte, že ak $c = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ je koreň polynómu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ s celočíselnými koeficientami, tak $p \mid a_0$ a $q \mid a_n$.

6. Nájdite všetky racionálne korene daných polynómov (s pomocou Hornerovej schémy a tvrdenia dokázaného v predchádzajúceje úlohe)
   a) $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$
   b) $f(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$
   c) $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$

[1] Pozri text k prednáške.