

Zadania prémieových úloh

V priebehu semestra by tu mali postupne pribúdať zadania prémieových úloh; čisto teoreticky by sa na konci semestra mohli objaviť aj „vzorové riešenia“.

1. Nech \circ je binárna operácia na G , taká, že:
 - a) \circ je asociatívna
 - b) \circ má ľavý neutrálny prvok e , teda existuje $e \in G$ taký, že $e \circ a = a$ pre každé $a \in G$
 - c) Každý prvok má ľavý inverzný prvok, t.j. ku každému $a \in G$ existuje $b \in G$ také, že $ba = e$ (kde e označuje ľavý neutrálny prvok).
Dokážte, že (G, \circ) je grupa. Ukážte na príklade, že množina s asociatívnou binárnou operáciou, ktorá má ľavý neutrálny a pravý inverzný prvok ešte nemusí byť grupa.
2. Ak $*$ je asociatívna binárna operácia na G , tak hovoríme, že $(G, *)$ je pologrupa. Dokážte, že konečná pologrupa, v ktorej platia zákony o krátení, je grupa. Platí to aj pre nekonečné pologrupy? (Dokážte alebo nájdite kontrapríklad.)
3. Nech G je grupa. Pre podmnožiny $A, B \subseteq G$ označíme $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$.
 - a) Nech A a B sú podgrupy G . Dokážte, že AB je podgrupa G práve vtedy, keď $AB = BA$.
 - b) Nájdite príklad grupy G a jej podgrúp A a B takých, že AB nie je podgrupa G .
 - c) Ak A, B sú konečné podgrupy G , tak $|AB| \cdot |A \cap B| = |A| \cdot |B|$.
 - d) Nech A, B, C sú podgrupy také, že $A \subseteq C \subseteq AB$. Dokážte $C = (AB) \cap (AC) = A(B \cap C)$.
4. Dokážte, že grupa A_4 párnych permutácií 4-prvkovej množiny nemá žiadnu 6-prvkovú podgrupu. (Kontrapríklad ukazujúci, že neplatí obrátenie Lagrangeovej vety.)
5. a) Dokážte, že v okruhu $C(0, 1)$ je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in C(0, 1); f(p) = 0\}$ pre $p \in \langle 0, 1 \rangle$ maximálny.
b) Dokážte, že všetky maximálne ideály v $C(0, 1)$ majú takýto tvar.
6. Nech G je grupa.
 - a) Pre normálnu podgrupu H definujme reláciu R ako $aRb \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$. Dokážte, že táto relácia je kongruencia (definícia je v poznámkach k prednáške). Dokážte, že rozklad zodpovedajúci relácii R je práve rozklad G podľa podgrupy H .
 - b) Dokážte, že ak R je kongruencia na G , tak $[e]_R$ je normálna podgrupa G . Navyše, rozklad určený reláciou ekvivalencie R je práve rozklad G podľa tejto podgrupy.
 - c) Overte, že priradenia medzi normálnymi podgrupami G a kongruenciami na G z predchádzajúcich častí úlohy sú navzájom inverzné.