B

1. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.

2. Je $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$, kde $a * b = ab + a + b$, grupa?

3. Nájdite 4 vektory v $\mathbb{R}^2$ tak, aby každé dva z nich boli lineárne nezávislé.

4. Sú vektory $(1,2,3)$, $(1,3,3)$ a $(3,0,4)$ lineárne nezávislé nad $\mathbb{Z}_5$?

5.* Zistite, či $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$ s obvyklým sčitovaním a násobením tvorí pole.

---

1. Ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak aj $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. (Lebo $f(x_1)$ a $f(x_2)$ predstavujú ten istý prvok, teda aj po zobrazení zobrazením g dostaneme rovnaký prvok.)

Túto rovnosť môžeme prepísať ako $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ a z toho, že $g \circ f$ je injekcia dostaneme $x_1 = x_2$.

Dokázali sme $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, čo je presne definícia injekcie.[1]

2. Je to grupa.
Je to binárna operácia (v menovateli nie je 0).
Asociatívnosť: $a * (b * c) = abc + ab + ac + bc + a + b + c = (a * b) * c$
Neutrálny prvok je 0, inverzný prvok ku a je $\frac{-a}{a+1}$.

3. Stačí ich voliť tak, aby v ľubovoľnej dvojici nebol jeden vektor násobok druhého. Napríklad: $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ a $(1,-1)$.

4. Sú lineárne závislé. (Ich súčet je vektor $(0,0,0)$.)

[1]Pretože to vlastne nikto nemal celé, už za definíciu injektívnosti som uznal 1.5 bodu.