

Domáce úlohy z lineárnej algebry

S výnimkou poslednej úlohy je správne riešenie každej úlohy za 1 bod. Za DÚ sa dá získať maximálne 10 bodov, teda už pri správnom vyriešení 10 úloh máte za DÚ plný počet. Za úlohy označené hviezdíčkou sa dajú získať body navyše – nad plný počet.

1. Nech A je konečná množina a $f: A \rightarrow A$ je zobrazenie. Dokážte:
 - a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
 - b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.
2. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N ?
3. Zistite, či množina $F = \{a + bi\sqrt{5}; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}\}$ s obvyklým sčítaním a násobením tvorí pole.
4. Dokážte, že pre ľubovoľné prvky a, b poľa F a pre každé celé číslo m platí $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$.
5. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a \cdot definovanými tak, že pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$ $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$ je vektorový priestor nad poľom \mathbb{R} .
6. Zistite, či $S = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c, a, b \in \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií. Ak áno, nájdite $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, že $S = [g_1, g_2, g_3]$.
7. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé vo vektorovom priestore \mathbb{R}^3 : $(1, 4, 3), (1, 3, 2), (1, 2, 1)$.
8. Nájdite 4 vektory v \mathbb{R}^2 také, že žiadny 2 z nich nie sú lineárne závislé.
9. Nech vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory nad poľom R . Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + \dots + n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?
10. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v R^3 :
 - a) $(1, 2, 3), (1, -2, 3), (1, 2, -3)$
 - b) $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$
 - c) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$.
11. Overte, že množina $S = \{f: R \rightarrow R : (\exists a, b \in R)(\forall x \in R)f(x) = ax + b\}$ je podpriestor priestoru všetkých funkcií z R do R . Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, že $S = [g, h]$.
12. Zistite, či $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0, x + 2y = 0\}$ je vektorový podpriestor priestoru \mathbb{R}^3 .
13. Dokážte, že každá štvorcová matica sa dá napísať ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice. (Matica A je symetrická, ak $A = A^T$ a antisymetrická, ak $A = -A^T$.)

14. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ priestoru \mathbb{R}^4 , ak $\vec{\alpha} = (1, 3, 2, 1)$, $\vec{\beta} = (4, 6, 5, 4)$ a $\vec{\gamma} = (2, 0, 1, 2)$.
15. Zistite $d(U)$, $d(V)$, $d(U + V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U + V$ a bázu $U \cap V$ v \mathbb{R}^4
 $U = [(1, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0)]$, $V = [(1, 3, 3, 1), (-1, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 2)]$.
16. Určte hodnotu danej matice v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

17*. Určte hodnotu matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že a_1, \dots, a_{n+1} sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$).

18. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: (\mathbb{Z}_7)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
 a) $f(1, 1) = (0, 1)$, $f(6, 1) = (3, 2)$
 b) $f(2, 3) = (1, 0)$, $f(3, 2) = (6, 1)$
19. Vyrátajte $E.A$ a $A.E$ pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ a a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Akým elementárnym riadkovým/stĺpcovým operáciám zodpovedajú jednotlivé matice E ? (Vyberte si 2 zo 4 uvedených matíc.)
20. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad \mathbb{Z}_2 b) nad \mathbb{Z}_3 , ak áno, nájdite inverznú.
- 21*. Nech A, B sú štvorcové matice nad poľom F . Dokážte, že ak matica $I - AB$ je regulárna, tak aj $I - BA$ je regulárna.
22. Riešte v \mathbb{Z}_7 sústavu určenú maticou (každá za 0.5 bodu):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & | & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & | & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & | & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$$