A

1. Dokážte, že skladanie zobrazení je asociatívne.

2. Dokážte, že v každom vektorovom priestore V nad poľom F platí $c.\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow c = 0 \vee \vec{\alpha} = 0$.

3. Je $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_5^3 : x + y + 4z = 1\}$ podpriestor priestoru $\mathbb{Z}_5^3$? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

4. Dokážte, že $F = \{a, b \in \mathbb{Q}; a + b\sqrt{5}\}$ s obvyklým násobením a sčitovaním tvorí pole.

5.* Overte, či $F = \{a, b \in \mathbb{Q}; a + b\sqrt[3]{5}\}$ s obvyklým násobením a sčitovaním tvorí pole.

Hlavne príklady 3 a 4 sú podľa mňa úplne štandardné a mala by ich mať väčšina ľudí, žiaľ, podľa toho, čo som práve doopravoval, to tak nevyzeralo.

---

1. príklad: Na overenie rovnosti 2 funkcií treba overiť, že sa rovnajú v každom bode:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

---

2. príklad: Predpokladajme, že $c.\vec{\alpha} = \vec{0}$. Ak $c = 0$, tak je to ok (tvrdenie platí, $1 \Rightarrow 1$). Ak $c \neq 0$, tak v poli F existuje inverzný prvok c^{-1} a dostaneme $c^{-1}(c\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} = \vec{0}$.

---

3. príklad: Vieme, že každý podpriestor musí obsahovať nulový vektor. Stačí si všimnúť, že $(0, 0, 0) \notin M$, teda M nie je vektorový podpriestor.

---

4. príklad: Je to v riešených úlohách. Bolo treba si uvedomiť, ktoré z podmienok treba overovať (niektoré sa „zdedia“). Ďalej pri hľadaní neutrálneho a inverzného prvku je jasné, že musí byť taký istý ako v $\mathbb{R}$, takže zostávalo overiť, či je to prvok F. (Napríklad $\frac{1}{a+b\sqrt{5}}$ pre $a, b \in \mathbb{Q}$ vyjadriť ako $a' + b'\sqrt{5}$, kde opäť a' a b' sú racionálne.)