

## Cvičenie 10

Poznámka: Snažil som sa tu stručne napísať, čo treba vedieť z teórie na to, aby ste mohli riešiť úlohy o polynómoch. Nie všetko z nej bude odprednášané, dá sa samozrejme nájsť aj v ATA a v poznámkach k prednáške. Nie je však na škodu mať niekde nejaké stručné zhrnutie.

Prvok  $c \in F$  sa nazýva koreňom polynómu  $F[x]$ , ak  $f(x) = 0$  (po dosadení  $c$  do polynómu dostaneme 0.) Ak pracujeme s polynómami z  $F[x]$ , tak ako korene môžeme uvažovať aj prvky z nejakého nadpoľa  $F_1 \supseteq F$ . (Lebo  $F[x] \subseteq F_1[x]$  – ak sú všetky koeficienty z  $F$ , tak súčasne patria aj do nadpoľa  $F_1$ .)

Na minulom cvičení sme videli, že  $c$  je koreň  $f(x)$  práve vtedy, keď  $f(x) = g(x)(x - c)$  (t.j. keď  $x - c \mid f(x)$ ). Ak platí  $f(x) = g(x)(x - c)^k$  (t.j.  $(x - c)^k \mid f(x)$ ), hovoríme, že  $c$  je  $k$ -násobný koreň  $f(x)$ .

Ireducibilné prvky okruhu  $F[x]$  sa nazývajú *ireducibilné polynómy*. Každý polynóm  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  sa dá jednoznačne rozložiť ako  $f(x) = a_n p_1(x) \dots p_n(x)$ , kde  $p_1 \dots p_n$  sú ireducibilné normované (=vedúci koeficient je 1) polynómy. (Rozklad na ireducibilné polynómy nám môže pomôcť pri zisťovaní, či je jeden polynóm deliteľný druhým, ako aj pri hľadaní najväčšieho spoločného deliteľa.)

Každý polynóm stupňa 1 je ireducibilný. V prípade, že  $f(x)$  má rozklad na polynómy stupňa 1, hovoríme o rozklade na *koreňové činitele*

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

(prvky  $x_1 \dots x_n$  sú práve korene polynómu  $f$ .)

V  $\mathbb{C}[x]$  sú jediné ireducibilné polynómy stupňa 1 – každý polynóm sa dá nad  $\mathbb{C}$  rozložiť na koreňové činitele.

V  $\mathbb{R}[x]$  môžu existovať ireducibilné polynómy stupňa 2, každý polynóm  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  stupňa 3 má však reálny koreň.

*Formálna derivácia* polynómu  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  je polynóm  $Df(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ . Polynóm  $f$  má násobné korene práve vtedy, keď  $(f(x), Df(x)) = 1$ .

Lubovoľný polynóm  $f(x) \in F[x]$  sa pre dané  $c \in F$  dá vyjadriť v tvare  $b_n(x - c)^n + \dots + b_1(x - c) + b_0$ , koeficienty  $b_i$  sú polynómom  $f$  prvkom  $c$  jednoznačne určené. V prípade, že  $F$  je pole nekonečnej charakteristiky (vysvetlíme si na cvičení – zatiaľ Vám stačí vedieť, že polia  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$  túto vlastnosť majú), tak  $b_k = \frac{D^k f(c)}{k!}$ . (Taylorov rozvoj polynómu – rovnaký tvar ako Taylorov rozvoj, ktorý poznáte z analýzy.)

## Polynómy

- \* Dokážte, že ak  $c = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  je koreň polynómu  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  s celočíselnými koeficientami, tak  $p \mid a_0$  a  $q \mid a_n$ .
- Nájdite všetky racionálne korene daných polynómov a ich násobnosť (s pomocou Hornerovej schémy a tvrdenia dokázaného v predchádzajúcej úlohe)
  - $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$
  - $f(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$
  - $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$[a)  $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  jednoduché; b)  $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ; c)  $-3, \frac{1}{2}$ ]
- Vypočítajte  $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$  a vyjadrite ho v tvare  $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .
  - $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6, g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$ ;
  - $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9, g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ ;
  - $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x - 9, g(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 7$ ;

- d)  $f(x) = x^8 - 1, g(x) = x^5 - 1$   
 (Výsledky: a)  $u(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, v(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}, d(x) = x + \frac{2}{3}$   
 b)  $u(x) = -\frac{x-1}{3}, v(x) = \frac{2x^2-2x-3}{3}, d(x) = x - 1$   
 c)  $d(x) = 1, u(x) = 1/30(2x^2 + 5x - 1), v(x) = -1/30(2x^3 + 9x^2 + 7x + 3)$
4. Dokážte, že  $x^2 + x + 1 \mid x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$  (v  $F[x]$  pre ľubovoľné pole  $F$ ).
5. Dokážte, že  $x^2 + x + 1 \mid x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$  v  $\mathbb{C}[x]$ . (Využite to, čo viete o koreňoch týchto polynómov.)
6. Rozložte na koreňové činitele (nad  $\mathbb{C}$ ):  
 a)  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$   
 b)  $x^4 + 4,$   
 c)  $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1,$   
 d)  $x^4 - 10x^2 + 1,$   
 e)  $x^4 - 4x^3 + 4x - 1.$
7. Rozložte na súčin ireducibilných polynómov nad  $\mathbb{R}$ :  
 a)  $x^4 + 4$   
 b)  $x^6 + 27$   
 c)  $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$   
 d\*)  $x^{2n} - 2x^n + 2$   
 e\*)  $x^4 - ax^2 + 1$  pre  $a \in (-2, 2)$   
 f\*)  $x^{2n} + x^n + 1.$
8. Dokážte: Ak  $a + bi$  je koreň polynómu  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  a  $b \neq 0$ , tak  $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$ .
9. Dokážte, že polynóm  $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  nemá viacnásobný koreň.
10. Nájdite všetky ireducibilné polynómy nad  $\mathbb{Z}_2$  stupňov 2,3,4.
11. Nájdite rozklad  $f(x)$  na ireducibilné polynómy v  $F[x]$ .  
 a)  $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 6, F = \mathbb{Z}_7$   
 b)  $f(x) = x^4 - 1, F = \mathbb{Z}_{11}$   
 c)  $f(x) = x^4 - 1, F = \mathbb{Z}_{13}$
12. \* Nech  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  je polynóm s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že ak  $a + b\sqrt{3}$  je koreň  $f(x)$ , tak aj  $a - b\sqrt{3}$  je koreň  $f(x)$ . Dokážte, že podobné tvrdenie platí, ak  $c$  nahradíme ľubovoľným prirodzeným číslom, ktoré nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.