A

1. Dokážte, že ak grupa $H$ je homomorfným obrazom komutatívnej grupy $G$ (t.j. existuje surjektívny homomorfizmus $f\colon G \to H$), tak aj $H$ je komutatívna.

2. Zistite, či sú dané grupy izomorfné.
a) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
b) $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$

3. Dokážte, že alternujúca grupa $A_n$ je generovaná:
a) Množinou všetkých cyklov $(ijk)$ dĺžky 3.
b) Množinou cyklov dĺžky 3 tvaru $(123), (124), \dots, (12n)$.

4. Popíšte faktorovú grupu $G/H$. (Ako vyzerajú triedy? Z každej triedy vybrať jedného reprezentanta. S akou grupou je izomorfná?) $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, \oplus)$, $H = [(2, 2)]$

---

B

1. Ak $G$ je konečná grupa, $H$ je podgrupa $G$ a $K$ je podgrupa $H$, tak $[G : K] = [G : H][H : K]$.

2. Zistite, či sú dané grupy izomorfné.
a) $G = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{C}, +)$
b) $G = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$, $(\mathbb{Z}_2, \oplus) \times (\mathbb{Z}_3, \oplus)$

3. Ak $G$ je grupa a $a, b \in G$, tak prvky $ab, ba \in G$ majú rovnaký rád.

4. Popíšte faktorovú grupu $G/H$. (Ako vyzerajú triedy? Z každej triedy vybrať jedného reprezentanta. S akou grupou je izomorfná?) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}; c^6 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

---

C

1. Nájdite všetky izomorfizmy medzi $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ a $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot)$.

2. Zistite, či sú dané grupy izomorfné. Svoju odpoveď zdôvodnite.
a) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$
b) $G = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{C}, +)$

3. Ak $H$ je podgrupa $G$ a $[G : H] = 2$, tak $H$ je normálna podgrupa. Navyše, pre každý prvok $x \in G$ platí $x^2 \in H$.

4. Zistite, či sú dané grupy izomorfné. Svoju odpoveď zdôvodnite.
$S/\{\pm 1, \pm i\}$, $S$ (Ako $S$ označujeme grupu $(\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}, \cdot)$.)

---

D

1. Ak $G$ má $p^2$ prvkov, kde $p$ je prvočíslo, tak každá vlastná podgrupa $G$ je cyklická.

2. Zistite, či sú dané grupy izomorfné. Svoju odpoveď zdôvodnite.
a) $G = (\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$
b) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{Q}, +)$

3. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $A_n$ normálna podgrupa grupy $S_n$.

4. Je $[(123)]$ (t.j. podgrupa generovaná cyklom dĺžky 3) normálnou pogrupou $S_3$? Sú grupy $S_3/[(123)]$ a $(\mathbb{Z}_2, +)$ izomorfné.

---

**Komentáre k riešeniam:**

A3: Pokúsim sa riešenie popísať tak, aby bolo vidno aj to, ako sa dá naň prísť.

Pre cyklus dĺžky 3 máme: $(ijk) = (ik)(ij)$ a aj $(ijk) = (1i)(1k)(1j)(1i)$ (pre $i$, $j$, $k$ rôzne).

a) Chcem ukázať, že ľubovoľnú permutáciu zloženú z párneho počtu transpozícií vieme dostať skladaním trojcyklov. Na to stačí ukázať, že vieme dostať dvojice transpozícií.

Ak obe transpozície v dvojici obsahujú ten istý prvok, tak je to už trojcyklus
$(ik)(ij) = (ijk)$.

Ak obsahujú rôzne prvky tak máme
$(ij)(kl) = (ij)(ik)(ik)(kl) = (ikj)(ikl)$.

b) Chceme dostať $(ijk) = (1i)(1k)(1j)(1i)$ ako kombináciu cyklov tvaru $(12n) = (1n)(12)$. Máme
$(12i)(12j)^{-1}(12k) = (1i)(12)(12)(1j)(1k)(12) = (1i)(1j)(1k)(12) = (1i)(1j)(1k)(1i)(1i)(12) = (ikj)(12i)$.
Z toho $(ijk) = (ikj)^{-1} = (12i)(12k)^{-1}(12j)(12i)^{-1}$.

B2b: Chcem izomorfizmus s cyklickou grupou $\Rightarrow$ stačí nájsť generátor.

C1: Bolo si treba uvedomiť, že izomorfizmus zobrazí generátor cyklickej grupy opäť na generátor (a izomorfná grupa tiež musí byť cyklická). Takže stačí nájsť všetky možné generátory $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot)$ – sú to 2 a 3. Ak viem, kam sa zobrazí generátor, bude tým už celé zobrazenie jednoznačne určené.

C2a: Nie sú izomorfné. Zdôvodniť sa to dá napríklad tak, že rovnica $x * x = a$ má v $G$ riešenie pre ľubovoľné $a$ ale v $H$ iba pre niektoré.

C4: Najjednoduchšie to asi šlo cez vetu o faktorovom izomorfizme, stačí použiť $f(x) = x^4$.

D1: Možné mohutnosti vlastných podgrúp sú 1 a $p$. Jediná jednoprvková grupa je $\{1\}$, každá podgrupa s prvočíselným počtom prvkov je cyklická.

D2: a) Chcem izomorfizmus s cyklickou grupou $\Rightarrow$ stačí nájsť generátor.
b) Množiny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ majú rôzne mohutnosti.

D3: Bolo treba použiť, že zloženie párnych/nepárnych permutácií je párna, ak zložím párnu s nepárnou, dostanem nepárnu.

D4: Kto spravil D3, D4 mal zadarmo ako špeciálny prípad. Na zdôvodnenie, že faktorová grupa je izomorfná so $\mathbb{Z}_2$ stačí to, že je to dvojprvková grupa.

**Opakujúce sa chyby:**

1. Ak neviem nájsť izomorfizmus, alebo pre nejaké konkrétne zobrazenie overím, že nie je izomorfizmus; tak som ešte nezdôvodnil, že dané grupy nemôžu byť izomorfné.

2. Podgrupa, ktorá je normálna, ešte nemusí byť komutatívna. (Napríklad $S_3 \times \{0\}$ je normálna pogrupa $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.)

A2b: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ majú rovnakú mohutnosť (obe sú spočítateľné) – niektorí z Vás tvrdili, že rôznu

B3: Ak ste používali izomorfizmus $f_a(x) = axa^{-1}$, bolo treba aj overiť, že to je naozaj izomorfizmus.

C1: Zobrazenie $f(x) = x \mod 4 + 1$ nie je homomorfizmus medzi $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ a $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot)$. Napríklad $3 = f(1 \oplus 1) \neq f(1) \odot f(1) = 2 \odot 2 = 4$.

C3: Niektorí ľudia tvrdili, že: $G \setminus H$ nie je grupa a preto $x^2 \notin G \setminus H$ (pre každé $x \in G \setminus H$).
Toto nie je pravda. Kontrapríklad: $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ako podmnožina $(\mathbb{Z}, +)$. Nie je to grupa ale (dokonca) pre každé $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ platí $x + x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.