A

1. Nájdite normovaný najväčší spoločný deliteľ $d(x)$ daných polynómov $f(x)$, $g(x)$ a nájdite $u(x)$, $v(x)$ také, že $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$:
$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

2. Nájdite všetky racionálne korene polynómu $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ a zistite ich násobnosť.

3. Dokážte, že okruhy $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie sú izomorfné.

4. Dokážte: Nech $f(x), g(x) \in F[x]$, kde F je pole. Ak existujú $a(x), b(x) \in F[x]$ také, že $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$, tak $d(x) = \gcd(f(x), g(x)) = 1$ (kde $\gcd(f(x), g(x))$ označuje normovaný najväčší spoločný deliteľ $f(x)$ a $g(x)$.)

---

skupina A: 1. $x^2 - 2 = (x+2)g(x) - (x+1)f(x)$; 2. -3, $\frac{1}{2}$ jednoduché;
3. Stačí si uvedomiť, že to musí byť súčasne izomorfizmus cyklických grúp $(2\mathbb{Z}, +)$ a $(3\mathbb{Z}, +)$. Takýto izomorfizmus musí zobrazovať generátor na generátor a je obrazom generátora jednoznačne určený. Dostaneme 2 možnosti pre grupový izomorfizmus, ani jedna z nich však nie izomorfizmus okruhov.

B

1. Nájdite normovaný najväčší spoločný deliteľ $d(x)$ daných polynómov $f(x)$, $g(x)$ a nájdite $u(x)$, $v(x)$ také, že $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$:
$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$, $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$

2. Nájdite všetky racionálne korene polynómu $2x^4 + 3x^3 + 2x - 4$ a zistite ich násobnosť.

3. Ak R je obor integrity a $x^2 = 1$, tak $x = 1$ alebo $x = -1$.

4. Dokážte: Nech $f(x), g(x) \in F[x]$, kde F je pole. Ak existujú $a(x), b(x) \in F[x]$ také, že $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$, tak $d(x) = \gcd(f(x), g(x)) = 1$ (kde $\gcd(f(x), g(x))$ označuje normovaný najväčší spoločný deliteľ $f(x)$ a $g(x)$.)

---

1. $u(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2}$, $v(x) = \frac{2x^3+5x^2-6}{6}$, $d(x) = 1$

2. -2 jednoduchý

3. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0$

C

1. Nájdite normovaný najväčší spoločný deliteľ $d(x)$ daných polynómov $f(x)$, $g(x)$ a nájdite $u(x)$, $v(x)$ také, že $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$:
$f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$

2. Nájdite všetky racionálne korene polynómu $f(x) = 6x^3 + x^2 - 10x + 4$ a zistite ich násobnosť.

3. Zistite, či okruhy polynómov $\mathbb{Z}[x]$ a $\mathbb{Q}[x]$ sú izomorfné.

4. Dokážte: Nech $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$, kde F je pole. Ak $f(x)$ a $g(x)$ sú nesúdeliteľné, t.j. $\gcd(f(x), g(x)) = 1$ a $f(x) \mid g(x)h(x)$, tak $f(x) \mid h(x)$.

---

1. $u(x) = -\frac{x-1}{3}$, $v(x) = \frac{2x^2-2x-3}{3}$, $d(x) = x - 1$

2. $\frac{1}{2}$, jednoduchý

3. Napríklad porovnaním kardinality množiny invertibilných prvkov.

4. Máme $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$ a potom $h(x) = 1.h(x) = (a(x)f(x) + b(x)g(x))h(x) = f(x).a(x)h(x) + b(x).g(x)h(x)$. Keďže $f(x)$ delí oba sčítance v poslednej rovnosti, delí aj $h(x)$.

D

1. Nájdite normovaný najväčší spoločný deliteľ $d(x)$ daných polynómov $f(x)$, $g(x)$ a nájdite $u(x)$, $v(x)$ také, že $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$:
$f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x - 9$, $g(x) = x^2 + 5x + 7$.

2. Nájdite všetky racionálne korene polynómu $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$ a zistite ich násobnosť.

3. Okruh R sa volá boolovský okruh, ak pre každé $a \in R$ platí $a^2 = a$. Dokážte, že každý boolovský okruh je komutatívny.

4. Dokážte: Nech $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$, kde F je pole. Ak $f(x)$ a $g(x)$ sú nesúdeliteľné, t.j. $\gcd(f(x), g(x)) = 1$ a $f(x) \mid g(x)h(x)$, tak $f(x) \mid h(x)$.

---

1. $1 = g(x)\frac{x^3+4x^2-3}{6} - \frac{x+3}{6}f(x)$

2. $-\frac{1}{2}$ dvojnásobný

3. Napríklad takto: $-a = a$ pre ľubovoľné $a \in R$, lebo $-a = (-a)^2 = a^2 = a$; a potom $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b = a + b$ dáva $ab = ba$.

4. Máme $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$ a potom $h(x) = 1.h(x) = (a(x)f(x) + b(x)g(x))h(x) = f(x).a(x)h(x) + b(x).g(x)h(x)$. Keďže $f(x)$ delí oba sčítance v poslednej rovnosti, delí aj $h(x)$.

Komentáre, časté chyby

C1: Ak ste si všimli, že oba polynómy majú koreň 1, tak ste ich mohli oba vydeliť $x - 1$. Potom stačilo tú istú úlohu riešiť, ktoré takto dostaneme (a majú stupeň o 1 nižší), a potom opäť vynásobiť polynómom $x - 1$, aby sme dostali riešenie pôvodnej úlohy.

D3: V riešení bolo treba využiť obe operácie, ktoré máme v okruhu. Viacero ľudí sa to snažilo riešiť len pomocou operácie $\cdot$ O nej v okruhu vieme len asociatívnosť (všetky ostatné vlastnosti v definícii okruhu nejako obsahujú aj operáciu $+$). Napríklad $(\mathbb{Z}, \circ)$, kde $a \circ b = a$ je príklad binárnej operácie, ktorá je asociatívna, spĺňa $a \circ a = a$ ale nie je komutatívna.