Kapitola 1

Euklidovské vektorové priestory

1.1 Skalárny súčin

1.2 Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Úloha 1.2.1. Nájdite bázu a dimenziu $S^{\perp}$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
a) $S = [(1,1,0,1),(2,1,0,1)]$
b) $S = [(1,5,4,3),(2,-1,2,-1)]$
c) $S = [(1,2,1,1),(2,1,-1,-1)]$
d) $S = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$
e) $S = [(2,1,2,3),(0,1,-2,1),(1,0,2,1)]$
f) $S = [(1,1,1,2),(1,0,1,1),(0,1,2,1)]$

Úloha 1.2.2. Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$. Nech $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$.
a) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
b) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
c) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
d) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
e) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
f) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
g) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
h)$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
i)$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$

Úloha 1.2.3. Zistite, či $\sin \pi x$ a $\cos \pi x$ sú kolmé v priestore $C(0,1)$ so skalárnym súčinom z príkladu 1.1.6. Akú majú tieto vektory veľkosť?

Úloha 1.2.4. Overte či predpis
a) $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
b) $\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$
určuje skalárny súčin na priestore P_2 všetkých polynómov stupňa najviac 2 nad poľom $\mathbb{R}$.

Úloha 1.2.5. Dokážte, že v ľubovoľnom euklidovskom priestore platí:
a) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ (Pytagorova veta)

b) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle$ (kosínová veta)
c) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$ (rovnobežníkové pravidlo)

Úloha 1.2.6. Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ definujeme stopu matice ako súčet jej diagonálnych prvkov, t.j. $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Overte, či na vektorovom priestore $M_{n,n}(\mathbb{R})$ určuje predpis

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$$

skalárny súčin. (Hint: Možno vám pri tom pomôžu rovnosti $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$. Prvá z nich sa dá ľahko overiť pomocou definície súčinu, druhá je zrejmá.)

Úloha 1.2.7. Overte, že v priestore $C(0,\pi)$ všetkých spojitých funkcií z uzavretého intervalu $\langle 0,1\rangle$ do $\mathbb{R}$ so skalárnym súčinom $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ sú ľubovoľné dve rôzne funkcie z množiny $\{1, \sin nx, \cos nx\}$ na seba kolmé. (Po vynormovaní by sme dostali množinu funkcií, ktorá má v tomto priestore do istej miery podobné vlastnosti ako ortonormálna báza v konečnorozmerných priestorov. Tento systém množín je dôležitý v matematickej analýze v súvislosti s Fourierovými radmi.)

Úloha 1.2.8. Nájdite ortonormálnu bázu pre priestory z úlohy 1.2.1.

Úloha 1.2.9. Nech S je podpriestor konečnorozmerného euklidovského vektorového priestoru V. Nech $P\colon V \to V$ je ortogonálna projekcia na tento podpriestor. Overte, že:
a) P je lineárne zobrazenie;
b) $\operatorname{Im} P = S$ a $\operatorname{Ker} P = S^\perp$.

Úloha 1.2.10. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie pri obvyklom skalárnom súčine pre:
a) priestory z úlohy 1.2.1;
b) pre ľubovoľný podpriestor $S = [\vec{\alpha}]$, pričom vektor $\vec{\alpha}$ je normovaný (má jednotkovú dĺžku);
c) pre podpriestor $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k]$, pričom vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ sú normované.
[Odpovede: b) $\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$; c) A^TA, kde A je matica, ktorej riadky tvoria vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$.]

Úloha 1.2.11. Ukážte, že pre ľubovoľný podpriestor S euklidovského vektorového priestoru V platí $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$. (Hint: Skúste si uvedomiť, ktorú z inklúzií medzi S a $S^\perp$ sme v dôkaze dôsledku 1.2.8 dokázali bez použitia predpokladu o konečnorozmernosti. Túto inklúziu použite raz pre S a raz pre $S^\perp$.)

Kapitola 2

Kvadratické formy

2.1 Definícia a základné vlastnosti

2.2 Kanonický tvar kvadratickej formy

Úloha 2.2.1. Overte, že relácia $A \sim B$, t.j. kongruencia symetrických matíc, je relácia ekvivalencie na množine reálnych symetrických matíc typu $n \times n$.

Úloha 2.2.2. Upravte na diagonálny (prípadne kanonický) tvar a nájdite príslušnú transformáciu premenných. Zapíšte aj maticové rovnosti, ktoré z nich vyplývajú:
a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$
b) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$
c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$
d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$
e) $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$

Úloha 2.2.3*. Preveďte kvadratickú formu $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1 \le i < k \le n} x_i x_k$ na diagonálny tvar.

[Výsledok: $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$]

Úloha 2.2.4*. Preveďte kvadratickú formu $\sum\limits_{1 \le i < k \le n} x_i x_k$ na diagonálny tvar.

2.3 Zákon zotrvačnosti

Úloha 2.3.1. Pre danú kvadratickú formu určte tie hodnoty parametra t, pre ktoré je kladne definitná.
a) $5x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3$
b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$
c) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - 3tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3 + 2x_1x_3$
d) $(x_1^2 + x^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + t(6x_1x_2 - 2x_1x_3) + t^2(x_1^2 + x_2^2)$

Úloha 2.3.2. Nech A je symetrická reálna matica taká, že $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$. (Determinanty D_k majú rovnaký význam ako v tvrdení 2.3.4.) Dokážte, že potom $a_{nn} > 0$.

Úloha 2.3.3. Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Definujme maticu $A = \|a_{ij}\|$ tak, že $a_{ij} = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle$. Dokážte, že $|A| \geq 0$ a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $|A| > 0$.

Kapitola 3

Podobnosť matíc

3.1 Matica prechodu, podobnosť matíc

Úloha 3.1.1. Pre $\vec{\alpha}_1 = (2,1)$, $\vec{\alpha}_2 = (1,2)$, $\vec{\beta}_1 = (-1,1)$, $\vec{\beta}_2 = (2,3)$, $\vec{\gamma}_1 = (1,1)$, $\vec{\gamma}_2 = (3,1)$. Nájdite:
a) Maticu P_1 prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ k báze $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$.
b) Maticu P_2 prechodu od bázy $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ k báze $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$.
c) Maticu P_3 prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ k báze $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$.
d) Aký je vzťah medzi maticami P_1, P_2 a P_3?

Úloha 3.1.2. Ak aspoň jedna zo štvorcových matíc A, B stupňa n je regulárna, tak AB a BA sú podobné. Platí to aj za predpokladu, že nie sú regulárne?

Úloha 3.1.3. Pre vektory $\vec{\gamma}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1,2,3$, označme ako $\vec{x}_i$ súradnice vektora v báze $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ a $\vec{x}'_i$ súradnice toho istého v báze $\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \vec{\alpha}'_3$. Nájdite matice prechodu od $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ k $\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \vec{\alpha}'_3$ ak viete, že $\vec{x}_1 = (1,2,1)$, $\vec{x}'_1 = (-1,1,1)$, $\vec{x}_2 = (-1,0,3)$, $\vec{x}'_2 = (1,-1,1)$, $\vec{x}_3 = (3,1,2)$ a $\vec{x}'_3 = (2,1,-2)$. (Návod: Bude to matica istého lineárneho zobrazenia.)

Úloha 3.1.4. Ukážte, že ak matica A je podobná matici B, tak aj matice A^{-1} a B^{-1} sú podobné.

3.2 Podobnosť s diagonálnou maticou

Úloha 3.2.1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory daných matíc nad poľom $\mathbb{C}$:
a) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$
b) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$
c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$
d) $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{smallmatrix}\right)$
e) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
Ak taká matica existuje, nájdite regulárnu maticu P s vlastnosťou, že PAP^{-1} je diagonálna.

Úloha 3.2.2. Ukážte, že vlastné vektory matice A typu $n \times n$ prislúchajúce k danej vlastnej hodnote c spolu s nulovým vektorom tvoria podpriestor priestoru F^n.

Úloha 3.2.3. Ako vyzerá matica A zodpovedajúca otočeniu v rovine okolo počiaku súradnicovej sústavy o nenulový uhol φ? Nájdite jej vlastné hodnoty a vlastné vektory v $\mathbb{C}$? Ako možno geometricky interpretovať fakt, že táto matica nemá reálne vlastné vektory?

Úloha 3.2.4. Ukážte, že pre $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ matica $\left(\begin{smallmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ nie je podobná s diagonálnou maticou. Aká je geometrická interpretácia tohoto výsledku?

Úloha 3.2.5. Ukážte, že ak k je smernica vlastného vektora matica A typu 2×2, tak k spĺňa kvadratickú rovnicu $a_{21}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$.

Úloha 3.2.6. Ak A, B sú regulárne matice, tak AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

Úloha 3.2.7. Dokážte: Štvorcová matica A je regulárna práve vtedy, keď 0 nie je vlastné číslo matice A.

Ak A je regulárna, tak c je vlastné číslo matice A práve vtedy, keď c^{-1} je vlastné číslo matice A^{-1}.

Úloha 3.2.8. Ak A je idempotentná matica, čiže $A^2 = A$, tak jej vlastné hodnoty môžu byť jedine 0 alebo 1.

Úloha 3.2.9. Nájdite (ak taká matice existuje) maticu P takú, že $PAP^{-1} = D$ je diagonálna matica.

a) $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

c) $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

Úloha 3.2.10. Nájdite (ak taká matice existuje) ortogonálnu maticu P takú, že $PAP^T = D$ je diagonálna matica.

a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

b) $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

c) $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$

d) $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{smallmatrix}\right)$

e) $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

f) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

g) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$

h) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

i) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

Úloha 3.2.11*. Nájdite symetrickú a ortogonálnu maticu P takú, že PAP^{-1} je ortogonálna matica ak

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ a^2 & ab & ab & b^2 \end{pmatrix}$$

3.3 Krivky druhého rádu

Úloha 3.3.1. Dokážte, že ortogonálne matice typu $n \times n$ tvoria s operáciou násobenia matíc grupu.