Nepovinné domáce úlohy

Všetky úlohy sú 1-bodové. Odovzdávať sa dajú do konca semestra alebo kým sa riešenie úlohy neodprezentuje na cvičení (v prípade, že budete chcieť vidieť, ako sa daná úloha mala riešiť)-

1. Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ definujeme stopu matice ako súčet jej diagonálnych prvkov, t.j. $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Overte, či na vektorovom priestore $M_{n,n}(\mathbb{R})$ určuje predpis
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$$
skalárny súčin. (Hint: Možno vám pri tom pomôžu rovnosti $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$. Prvá z nich sa dá ľahko overiť pomocou definície súčinu, druhá je zrejmá.)

2. Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$. Definujme maticu $A = \|a_{ij}\|$ tak, že $a_{ij} = \langle \vec{\alpha_i}, \vec{\alpha_j} \rangle$. Dokážte, že $|A| \geq 0$ a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $|A| > 0$.