A

1. Pre danú symetrickú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a ortogonálnu maticu P, tak aby platilo $PAP^T = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Zistite, či predpis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} A \vec{y}^T$ určuje skalárny súčin ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B

1. Pre danú symetrickú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a ortogonálnu maticu P, tak aby platilo $PAP^T = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Zistite, či predpis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} A \vec{y}^T$ určuje skalárny súčin ak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

C

1. Pre danú symetrickú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a ortogonálnu maticu P, tak aby platilo $PAP^T = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Upravte kvadratickú formu $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$ na kanonický tvar a nájdite príslušnú transformáciu premenných. Zapíšte aj maticovú rovnosť, ktorá vyplýva z vášho výsledku.

Komentáre k riešeniam i častým chybám

Písomka dopadla veľmi dobre, takže snáď postačí celkom stručne.

1. príklad vo všetkých 3 skupinách: V zadaní sme chceli maticu, ktorá je ortogonálna. Za správny výpočet matice P takej, že $PAP^T = D$, ktorá však nie je ortogonálna, som dával 2 body – hoci to nebolo to, čo ste mati riešiť. Takisto nefunguje taký postup, že nájdem ľubovoľnú maticu spĺňajúcu $PAP^T = D$ a tú ortogonalizujem – ortogonalizácia mi pokazí platnosť rovnosti $PAP^T = D$.

Štandardný postup: Nájsť vlastné čísla, k nim vlastné vektory. V každej skupine bolo jedno vlastné číslo dvojnásobné, preto bolo potom treba ešte vlastné vektory prislúchajúce k nemu ortogonalizovať a nakoniec všetky 3 vektory vynormovať. (Vlastné vektory k rôznym vlastným hodnotám symetrickej matice sú na seba kolmé.)

Vo všetkých 3 skupinách bola matica zvolená tak, aby sa dali použiť pri počítaní determinantu riadkové alebo stĺpcové úpravy na to, aby sme našli aspoň jeden koreň (a nemuseli ho hádať).

V skupinách A aj B stačilo v matici $A - xI$ sčítať všetky riadky – napríklad pripočítam prvý aj druhý k tretiemu. Potom mi v treťom riadku na všetkých miestach vyjde ten istý výraz, ktorý môžeme vyňať pred determinant.

V skupine C odčítaním druhého riadku od prvého dostanem

$$|A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 4 & -2 \\ 4 & 1-x & -2 \\ -2 & -2 & -2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-x & x+3 & 0 \\ 4 & 1-x & -2 \\ -2 & -2 & -2-x \end{vmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1-x & -2 \\ -2 & -2 & -2-x \end{vmatrix}$$

Ďalej môžem pripočítať prvý stĺpec k druhému a dostanem

$$|A - xI| = (x+3) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1-x & -2 \\ -2 & -2 & -2-x \end{vmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 5-x & -2 \\ -2 & -4 & -2-x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+3) \begin{vmatrix} 5-x & -2 \\ -4 & -2-x \end{vmatrix} = -(x+3)(x^2 - 3x - 18) = -(x+3)^2(x-6)$$

Podstatné je to, že v oboch prípadoch som dostal polynóm druhého stupňa, ktorého korene viem nájsť ľahko.

2. príklad: V A2 v niektorých riešeniach bola kladná definitnosť zdôvodnená na základe úpravy na tvar $(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2$. Takáto kvadratická forma však ešte kladne definitná nemusí byť. Platí pre ňu, že nadobúda len hodnoty ≥ 0 (je kladne semidefinitná), ale viem nájsť nenulové hodnoty, pre ktoré je hodnota kvadratickej formy 0 – napríklad $(1, -1, 1)$. Podobne to bolo aj v skupine B. (Ako si dokonca niekto v jednom z riešení všimol, je to vlastný vektor pre maticu A k vlastnej hodnote 0.)

V skupine C sa ako štandardné postupy vyskytovali úprava na kanonický tvar a použitie stĺpcových a riadkových úprav. Je potrebné dať si pozor na správne poradie zápisu (t.j. či sme našli maticu P, pre ktorú $PAP^T = D$, alebo obrátene $PDP^T = A$).