C

1. Dokážte: Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jek prvok, tak zobrazenie $f_a \colon G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia. (Hint: Ak s tým neviete pohnúť, vyskúšajte si to najprv pre grupu $(\mathbb{Z}, +)$.)

2. Zistite, či $F = \{a + \sqrt{3}b; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$ s obvyklým sčitovaním a násobením reálnych čísel je pole.

3. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$ $r.(a, b) = (ra, 2rb)$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. (Fakt, že $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ je komutatívna grupa nemusíte podrobne overovať, stačí overiť tie vlastnosti z definície vektorového priestoru, kde vystupuje aj násobenie.)

4. Zistite, či vektory (1,2,3), (1,-2,3), (1,2,-3) tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$.

5.* Je $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$ (berieme obvyklé sčitovanie a násobenie reálnych čísel)? Dokážte, že v tomto priestore sú 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.

F

1. Dokážte, že skladanie zobrazení je asociatívne.

2. Je $\mathbb{R}$ s operáciou $a * b = a + b - 1$ grupa?

3. Sú vektory $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 3)$ a $(3, 0, 4)$ lineárne nezávislé nad $\mathbb{Z}_7$?

4. Množina všetkých zobrazení $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so sčitovaním a násobením definovaným po bodoch tvorí vektorový priestor nad poľom F. (T.j. sčitovanie je definované tak, že $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ a $(c.f)(x) = c.f(x)$.) Vyberte si 2 z piatich podmienok, ktoré sme mali v definícii vektorového priestoru a tie overte.

5.* Nech vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory nad poľom $\mathbb{R}$. Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + \ldots + n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?