A

1. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F. Dokážte, že zobrazenie $f\colon V \to W$ je lineárne práve vtedy, keď pre každé $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a pre každé $c, d \in F$ platí $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$.

2. Určte hodnosť danej matice (nad $\mathbb{R}$) v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$:
$\begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$

3. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(\mathbb{Z}_5)^4$: (1,2,3,4), (1,1,1,1), (3,2,1,0).

4. Nájdite (aspoň jednu) maticu lineárneho zobrazenia (ak také zobrazenie existuje) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pre ktoré platí $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(1,-1,1) = (1,2,-2)$, $f(0,1,-2) = (0,-1,2)$.

Úloha 1 je vyriešená v poznámkach k prednáške – dôkaz vety 5.3.4.

2. $\begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & -(c+1) & 2c \\ c & 0 & c \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2c \\ c & 0 & c \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2c \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2c-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2(c-2) \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1): 2.stĺpec− =3.stĺpec
(2): Pre $c \neq -1$ vynásobíme 2.stĺpec $\frac{1}{c+1}$
(3): Pre $c \neq 0$ vynásobíme 3.riadok $\frac{1}{c}$
(4): Pre $c \neq 2$ vynásobíme 3.riadok $\frac{1}{2(c-2)}$

Zistili sme, že ak $c \neq -1, 0, 2$ platí $h(A) = 3$.

Pre $c \in \{-1, 0, 2\}$ overíme po dosadení, že platí $h(A) = 2$.

Iný spôsob: Vypočítame determinant $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{vmatrix} = 2c(c-2)(c+1)$. Teda pre $c \notin \{-1, 0, 2\}$ je determinant nenulový a $h(A) = 3$.

3. Uvedené vektory sú lineárne závislé, preto sa nedajú doplniť na bázu. To, že sú lineárne závislé môžeme zistiť použitím úpravy na RTM, alebo tiež si môžeme priamo všimnúť, že $(1,2,3,4) + (3,2,1,0) = 4.(1,1,1,1)$, teda $(1,2,3,4) - 4.(1,1,1,1) + (3,2,1,0) = \vec{0}$.