Väčšinu z týchto úloh (alebo prinajmenšom veľmi podobné úlohy) môžete nájsť v knihe [ŠS].

23.–24.9.

1. Tautológie:
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee (p \vee r)$
   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Pokec o tom, že sa to volá obmenená implikácia a často sa to používa – injekcia ako príklad.)
   $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ (Pokec o tom, ako to súvisí s dôkazom sporom.)

2. Množinové identity: (Pomocou výrokov/tabuľky aj cez Vennove diagramy.)
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$
   $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (kde $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ označuje symetrický rozdiel množín)

3. Ako nepovinnú DÚ ste dostali rozmyslieť si Vennove diagramy pre viac množín.

Odkaz: `http://en.wikipedia.org/wiki/Venn_diagram#Extensions_to_higher_numbers_of_sets`

30.9.–1.10.

1. Zapísať pomocou kvanfikátorov:
   Postupnosť (x_n) konverguje k 0.
   Postupnosť (x_n) má limitu.
   Negácie predchádzajúcich dvoch výrokov.
   (Pri tejto príležitosti som povedal niečo o tom, že $(\forall x \in A)P(x)$ je to isté ako $(\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x))$, podobne $(\forall \varepsilon > 0)P(\varepsilon)$ znamená $(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \Rightarrow P(\varepsilon))$.)

2. Zistiť, či platí ekvivalencia alebo aspoň niektorá z implikácií a zdôvodniť:
   $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)]$
   $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists x Q(x))]$

3. Porovnať výroky $P_1 \equiv \forall x \forall y P(x,y), \dots, P_8 \equiv \exists y \exists x P(x,y)$. (Všetky možné kombinácie, čo z čoho vyplýva/nevyplýva. Šalát-Smítal, s.17, cvičenie 1.2.5).

Z tej poslednej úlohy som stihol s každou skupinou iba nejaké dve dvojice výrokov rozobrať, či sú ekvivalentné alebo platí implikácia niektorým smerom.

7.–8.10.

1. Zapísať pomocou kvantifikátorov $\exists$ a $\forall$ „Existuje práve jedno x s vlastnosťou $P(x)$."

2. Relácie $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, a $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Čomu sa rovná $D(R)$, $H(R)$, R^{-1}, S^{-1}, $R \circ R$, $S \circ R$, $R \circ S$, $S \circ S$.

3. Pre reláciu na množine A platí:
   R je reflexívna $\Leftrightarrow id_A \subseteq R$
   R je tranzitívna $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$
   R je symetrická $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

15-16.10

Zopakoval som nejaké základné vlastnosti zobrazení.

1. Zloženie injekcií je injekcia, zloženie surjekcií je surjekcia.

2. $g \circ f$ je injekcia $\Rightarrow f$ je injekcia; $g \circ f$ je surjekcia $\Rightarrow g$ je surjekcia.

3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

22-23.10

Označenie: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$
Odkaz: `http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_hotel`

1. Nájsť bijekcie medzi: a) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \setminus \{0\}$; b) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

2. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
   $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
   $\aleph_0^2 = \aleph_0^3 = \ldots = \aleph_0^k = \aleph_0$ pre $k \in \mathbb{N}$
   Ak pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí $|A_i| = \aleph_0$, tak aj $|\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i| = \aleph_0$. (Spočítateľné zjednotenie spočítateľných množín je opäť spočítateľná množina.)

3. Nájsť bijekcie medzi $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $(0,1\rangle$, $\langle 0,1\rangle$. (Hint 1: Môže pomôcť to ako sme riešili prvý dnešný príklad. Hint 2: Môže byť užitočný rozklad $(0,1\rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty}(1/(n+1), 1/n\rangle$.)

29.10.-30.10.

Označenie: $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

1. Ak a, b, c sú kardinálne čísla, tak:
   a) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
   b) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
   c) $a \leq b \Rightarrow a.c \leq b.c$
   d) $a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c$
   e) $a \leq b \Rightarrow c^a \leq c^b$.

2. Overte, že platí:
   $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

3. Nájsť všetky zobrazenia $\emptyset \to \emptyset$, $A \to \emptyset$, $\emptyset \to A$ pre $A \neq \emptyset$. Čo na základe toho vieme povedať o kardinálnych číslach 0^0, a^0, 0^a pre $a \neq 0$.

5.-6.11.

1. Ak a, b, c sú kardinálne čísla, tak:
   $a^{b+c} = a^b.a^c$
   $(a^b)^c = a^{bc}$

12.-13.11.

1. Zistite kardinality daných množín:
   A =všetky postupnosti prirodzených čísel
   B =rastúce postupnosti prirodzených čísel
   C =neklesajúce postupnosti prirodzených čísel
   D =konečné postupnosti prirodzených čísel
   E =všetky aritmetické postupnosti prirodzených čísel

2. Pre každé kardinálne číslo a platí: $a^a \leq 2^{a.a}$.

19.-20.11.

1. Dokážte rovnosti:
   a) $\mathfrak{c} = n.\mathfrak{c} = \aleph_0.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$
   b) $2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
   c) $2^{\mathfrak{c}} = n^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$

2. Zistite kardinalitu množiny všetkých bijekcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. (Takéto kardinálne číslo by sme mohli nazvať „$\aleph_0$-faktoriál“.)

3. Pre každé nekonečné kardinálne číslo a platí $a + \aleph_0 = a$. (Hint: Ak množina A je nekonečná, tak obsahuje nekonečnú spočítateľnú podmnožinu. Túto podmnožinu by sme mohli použiť na dôkaz uvedenej rovnosti.)

4. Množina algebraických čísel je spočítateľná.

26.11.

Budeme pracovať s dvoma definíciami usporiadania. Prvá zodpovedá ostrému usporiadaniu $<$. Teda $(R,<)$ je *čiastočne usporiadaná množina,* ak relácia $<$ na množine R je ireflexívna, antisymetrická a tranzitívna, čiže pre ľubovoľné $x, y, z \in R$ platí

$$x \not< x,$$
$$x < y \Rightarrow y \not< x,$$
$$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z.$$

Ak je táto relácia navyše aj *trichotomická,* t.j. pre každé $x, y \in R$ platí

$$x = y \vee x < y \vee y > x,$$

(inak povedané – ľubovoľné 2 rôzne prvky sú v tejto relácii porovnateľné) tak $(R,<)$ je *lineárne usporiadaná množina.* (Niekedy sa používa aj názov úplne usporiadaná množine.)

Druhá možnosť je používať definíciu, ktorá zodpovedá relácii $\leq$. Vtedy $(R,\leq)$ voláme *čiastočne usporiadaná množina,* ak relácie $\leq$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, čiže pre ľubovoľné $x, y, z \in R$ platí

$$x \leq x,$$
$$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y,$$
$$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

Ak sú ľubovoľné 2 prvky porovnateľné, teda pre ľubovoľné $x, y \in R$

$$x \leq y \vee y \leq x,$$

tak hovoríme o lineárnom usporiadaní.

Tieto definície sú v istom zmysle rovnocenné – ak nejaká relácia spĺňa prvú z nich, tak vieme dostať reláciu spĺňajúcu tú druhú tak, že pridáme všetky dvojice tvaru (x, x).

$$\leq = < \cup \{(x, x); x \in R\}.$$

Budeme bežne používať obe definície, z kontextu by malo byť jasné, ktorú máme práve na mysli.

1. Pre ľubovoľnú množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subset)$ čiastočne usporiadaná množina. Znázornite túto čiastočne usporiadanú množinu pomocou Hasseho diagramu pre pre $X = \{0, 1, 2\}$. Má táto čiastočne usporiadaná množina najmenší a najväčší prvok, maximálne a minimálne prvok? Ako to bude v prípade čiastočne usporiadanej množine $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}, \subseteq)$?

2. Vedeli by ste nakresliť podobný diagram ako v predchádzajúcej úlohe aj pre 4-prvkovú množinu $X = \{0, 1, 2, 3\}$? (Tento diagram predstavuje 4-rozmernú kocku.)

3. Ak $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sú čiastočne usporiadané, tak na množine $A \times B$ definujeme reláciu $<$ ako
$$(a, b) < (a', b') \Leftrightarrow (a < a') \vee [(a = a') \wedge (b < b')].$$
a) Dokážte, že relácia $<$ je čiastočné usporiadanie na množine $A \times B$. (Takéto usporiadanie sa zvykne volať *lexikografické.*)
b) Dokážte, že ak $<_A$ aj $<_B$ je lineárne usporiadanie, tak aj $<$ je lineárne usporiadanie.
c) Nakreslite Hasseho diagram pre čiastočné usporiadanie, ktoré dostaneme, ak v predchádzajúcej úlohe za čiastočne usporiadané množiny A a B zvolíme $(\mathcal{P}(\{0\}), \subset)$ a $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subset)$.

4. Je v čiastočne usporiadnej množine:
a) Každý najmenší prvok aj minimálnym prvkom?
b) Každý minimálny prvok aj najmenším prvkom?
Zdôvodnite alebo nájdite kontrapríklad! Ako to bude v prípade, že ide o lineárne usporiadanie.

5. Majú usporiadané množiny $(\mathbb{N}, <)$, $(\langle 0, 1\rangle, <)$, $((0, 1), <)$ najmenší a najväčší prvok?

6. Ak má usporiadaná množina $(A, <)$ jediný minimálny prvok, musí byť tento prvok najmenší? Platí to pre konečné množiny? Platí to pre lineárne usporiadané množiny?

7. V usporiadanej množine $(\mathbb{R}, <)$ nájdite
a) podmnožinu, ktorá nie je zdola ohraničená;
b) podmnožinu, ktorá je zdola ohraničená, ale nemá najmenší prvok.

3.12. a 10.12/11.12. a 18.12.

1. Každá podmnožina dobre usporiadanej množiny (so zdedeným usporiadaním) je dobre usporiadaná.

2. Nech $(A, <)$ je dobre usporiadaná množina a $f\colon A \to A$ je zobrazenie zachovávajúce usporiadanie (teda $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$). [1] Potom pre každé $a \in A$ platí $a \leq f(a)$. (Hint: Keby bola množina $\{a \in A; a > f(a)\}$ neprázdna, čo by sme vedeli povedať o jej najmenšom prvku?)

[1] Toto zadanie si snáď zaslúži drobný komentár. Obvykle pod pojmom *zachováva usporiadanie* rozumieme $a_1 \leq a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$. Ak by sme chceli toto zadanie sformulovať pomocou neostrého usporiadania $\leq$, pridali by sme podmienku, že f je injektívne – dostali by sme to isté.

3. Dokážte, že každá čiastočne usporiadaná množina, ktorej každá neprázdna podmnožina má najmenší prvok, je dobre usporiadaná.

4. Uvažujme usporiadané množiny $\mathbb{N}$ s obvyklým usporiadaním a $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, kde ∞ je nový prvok a usporiadanie dodefinujeme tak, že prvok ∞ je väčší ako všetky prvky z $\mathbb{N}$ (pri porovnávaní prvkov z $\mathbb{N}$) použijeme obvyklé usporiadanie. Dokážte, že:
a) Takéto usporiadanie je dobré usporiadanie na $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.
b) Usporiadané množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ nie sú izomorfné (=neexistuje medzi nimi bijekcia zachovávajúca usporiadanie; niekedy sa tiež používa termín podobné).
Poznámka: takáto dobre usporiadaná množina sa zvykne dosť často označovať $\omega+1$, pozri obr. 1.

5. Množina $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ s lexikografickým usporiadaním[2]

$$(a,b)<(c,d) \qquad \Leftrightarrow \qquad (c<d)\vee[(c=d)\wedge(a<b)]$$

je dobre usporiadaná. (Pozri obr. 2.)

6. Predchádzajúci príklad môžeme trochu zovšeobecniť. Nech $(I,\leq)$ je dobre usporiadaná množina a pre každé $i\in I$ je $(A_i,\leq_i)$ dobre usporiadaná množina. Na množine $A := \bigcup_{i\in I}\{i\}\times A_i$ definujeme usporiadanie

$$(i,a)\leq(i',a')\Leftrightarrow(i<i')\vee[(i=i')\wedge(a\leq_i a')]$$

(čiže opäť ide o lexikografické usporiadanie). Potom takto definované usporiadanie je dobrým usporiadaním na A.

7. Ak $(A,\leq)$, $(B,\leq)$ sú dobre usporiadané množiny, tak existuje najviac jeden izomorfizmus (=bijekcia zachovávajúca usporiadanie) z A na B.

8. Ak $(A,\leq)$ a $(B,\leq)$ sú dobre usporiadané množiny, tak buď $(A,\leq)$ je izomorfná (podobná) s nejakým počiatočným úsekom množiny B alebo B je izomorfná s nejakým počiatočným úsekom množiny B. (*Počiatočný úsek* lineárne usporiadanej množiny $(X,\leq)$ je podmnožina $U\subseteq X$ s vlastnosťou $x\in U\wedge y\leq x\Rightarrow y\in U$. Počiatočné úseky v $(X,\leq)$ sú X a množiny tvaru $X_a=\{x\in X; x<a\}$ pre $a\in X$.)[3]

Doplňujúce príklady na dobré usporiadanie

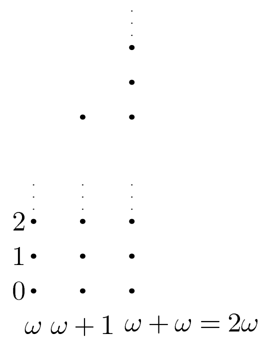
Tieto príklady sú o niečo náročnejšie, ale dal som ich sem pre ľudí, ktorých by to trochu zaujímalo a trúfali by si ich zvládnuť.

Súvisia s niečím, čo sa zvykne volať ordinálna aritmetika – t.j. aj ordinály môžeme sčitovať, násobiť a umocňovať. Niečo o tom sa dozviete možno aj na prednáške a základné veci nájdete aj v [ŠS] alebo [Z].

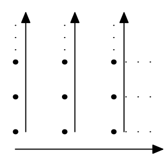
Sčitovanie a násobenie sme v podstate už videli – sčítanie znamená, že 2 dobre usporiadané množiny uložíme za sebou, obr. 1. Pri násobení použijeme lexikografické usporiadanie, obr. 2. O niečo komplikovaniejšie je umocňovanie – napríklad otázka, ako by sme definovali ω^ω. Cieľom týchto príkladov je ukázať, že nemáme nejaké prirodzené dobrú usporiadanie na

[2] Lexikografické usporiadanie znamená, že n-tice porovnáme na jednej pozícii a ak je táto rovnaká, tak porovnávame ďalšiu. Ak máme byť úplne presní, tak musíme vždy povedať aj to, ktorú pozíciu chápeme ako najdôležitejšiu – v tomto prípade je to druhá pozícia. V niektorých knihách sa lexikografické usporiadanie, v ktorom vyššie pozície chápeme ako dôležitejšie, zvykne nazývať antilexikografické usporiadanie.

[3] Tento výsledok nám hovorí, že dobre usporiadané množiny vieme v istom zmysle porovnávať. Viac sa o tom dá dočítať v [ŠS, Z].



Obr. 1: Ordinály ω, $\omega + 1$ a $\omega + \omega$.



Obr. 2: Ordinál $\omega.\omega = \omega^2$. Šípky na obrázku majú znázorňovať, ako robíme lexikografické usporiadanie; najprv porovnávame pozíciu podľa dolnej šípky, ak sú na rovnakej úrovni, ako druhé kritérium máme zvislé šípky.

množine postupností prirodzených čísel, ale keď sa obmedzíme na konečné postupnosti, už ich vieme dobre usporiadať. Snažil som sa pridať aj obrázky, aby sa to trochu dalo predstaviť. [4]

1. Ukážte, že množina všetkých postupností prirodzených čísel s lexikografickým usporiadaním (uprednostňujeme nižšie pozície), t.j.

   $$(x_k) < (y_k) \qquad \Leftrightarrow x_k < y_k \text{ pre najmenšie } k \in \mathbb{N} \text{ také, že } x_k \neq y_k$$

   nie je dobre usporiadaná. (Hint: Má množina postupností tvaru $(0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots)$ najmenší prvok?)

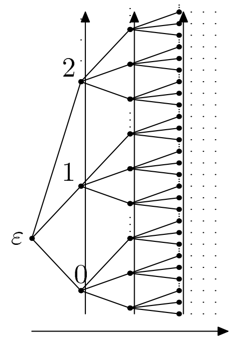
2. * Množina všetkých postupností prirodzených čísel, ktoré sú od istého miesta nulové je dobre usporiadaná s lexikografickým usporiadaním (uprednostňujeme vyššie pozície), t.j.

   $$(x_k) < (y_k) \qquad \Leftrightarrow x_k < y_k \text{ pre najväčšie } k \in \mathbb{N} \text{ také, že } x_k \neq y_k.$$

   (Všimnite si, že také k musí existovať – vďaka tomu, že od istého miesta sú už obe postupnosti nulové, t.j. sú rovnaké.)

3. * Množina všetkých konečných postupností prirodzených čísel usporiadaná podľa dĺžky

[4] PaedDr. Ďuriš, ktorého niektorí poznáte z učiteľských sústredení, adresoval výčitku na našu katedru, keď sme sa rozprávali o takýchto veciach – že je to celkom pekné, tak prečo mu nikto také neukázal v čase, keď u nás študoval na podobnom odbore ako Vy. Tak som si povedal, že by ste mali mať lepší život ako predchádzajúce generácie a dozvedieť sa aj niečo o ordinálnej aritmetike a o tom ako vyzerajú mocniny ordinálnych čísel.



Obr. 3: Jedno z možných znázornení ordinálu ω^ω. Znázornené body predstavujú konečné postupnosti, šípky znázorňujú, ako ich usporiadame. Keď sa poriadnejšie pozriete na obrázok, mali by ste na prvej vrstve objaviť ordinál ω, na druhej vrstve ω^2.

a pre postupnosti rovnakej dĺžky lexikograficky, čiže

$$(x_0, \ldots, x_k) < (y_0, \ldots, y_n) \text{ ak } k < n$$
$$(x_0, \ldots, x_n) < (y_0, \ldots, y_n) \text{ ak } x_k < y_k \text{ pre najmenšie } k \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ také, že } x_k \neq y_k$$

Literatúra

[ŠS] Tibor Šalát and Jaroslav Smítal. *Teória množín.* UK, Bratislava, 1995.

[Z] Pavol Zlatoš. O dobrom usporiadaní a axióme výberu. `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/wo/DUAC1w.pdf`.