

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
1.1 Sylaby a literatúra . . . . .	3
1.2 Základné označenia . . . . .	3
<b>2 Množiny a zobrazenia</b>	<b>4</b>
2.1 Dôkazy . . . . .	4
2.1.1 Základné typy dôkazov . . . . .	4
2.1.2 Matematická indukcia . . . . .	4
2.1.3 Drobné rady ako dokazovať . . . . .	4
2.1.4 Výroky, logické spojky, tautológie . . . . .	4
2.1.5 Negácia výrokov s kvantifikátormi . . . . .	4
2.2 Množiny a zobrazenia . . . . .	4
2.2.1 Množiny . . . . .	4
2.2.2 Zobrazenia . . . . .	5
2.2.3 Vzor a obraz množiny* . . . . .	6
2.3 Permutácie . . . . .	6
<b>3 Grupy a polia</b>	<b>7</b>
3.1 Binárne operácie . . . . .	7
3.1.1 Zovšeobecnený asociatívny zákon* . . . . .	8
3.2 Grupy . . . . .	8
3.3 Polia . . . . .	8
<b>4 Vektorové priestory</b>	<b>11</b>
4.1 Vektorový priestor . . . . .	11
4.2 Podpriestory . . . . .	11
4.3 Lineárna kombinácia, lineárna nezávislosť . . . . .	12
4.3.1 Lineárna kombinácia a lineárny obal . . . . .	12
4.3.2 Lineárna nezávislosť . . . . .	13
4.4 Báza a dimenzia . . . . .	13
4.5 Lineárne a direktné súčty podpriestorov . . . . .	14
<b>5 Lineárne zobrazenia a matice</b>	<b>15</b>
5.1 Matice . . . . .	15
5.2 Riadková ekvivalencia a hodnosť matice . . . . .	16
5.3 Lineárne zobrazenia . . . . .	17
5.4 Súčin matic . . . . .	17
5.5 Inverzná matica . . . . .	18

5.6	Elementárne riadkové operácie a súčin matíc . . . . .	19
5.7	Sústavy lineárnych rovníc . . . . .	19
5.7.1	Homogénne sústavy lineárnych rovníc . . . . .	19
5.7.2	Gaussova eliminačná metóda . . . . .	20
5.7.3	Frobeniova veta . . . . .	20
5.8	Jadro a obraz lineárneho zobrazenia . . . . .	20
5.9	Hodnosť transponovanej matice . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Determinanty</b> . . . . .	<b>22</b>
6.1	Motivácia . . . . .	22
6.2	Definícia determinantu . . . . .	22
6.3	Výpočet determinantov . . . . .	22
6.3.1	Laplaceov rozvoj . . . . .	22
6.3.2	Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií . . . . .	22
6.4	Determinant súčinu matíc . . . . .	23
6.5	Využitie determinantov . . . . .	23
6.5.1	Výpočet inverznej matice . . . . .	23
6.5.2	Cramerovo pravidlo . . . . .	23
<b>A</b>	<b>Delenie so zvyškom</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>B</b>	<b>Komplexné čísla</b> . . . . .	<b>25</b>
B.1	Definícia komplexných čísel, algebraický tvar komplexného čísla . . . . .	25
B.2	Geometrická interpretácia komplexných čísel, goniometrický tvar, Moivrova veta . . . . .	25
B.3	Riešenie rovníc v komplexných číslach . . . . .	26
B.3.1	Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi . . . . .	26
B.3.2	Binomické rovnice . . . . .	26
B.4	Zopár ďalších vecí súvisiacich s komplexnými číslami . . . . .	26

# Kapitola 1

## Úvod

1.1 Sylaby a literatúra

1.2 Základné označenia

## Kapitola 2

# Množiny a zobrazenia

### 2.1 Dôkazy

#### 2.1.1 Základné typy dôkazov

**Tvrdenie 2.1.1.** *Nech  $n$  je celé číslo. Potom zvyšok čísla  $n^2$  po delení 4 je 0 alebo 1. Pritom ak  $n$  je párne, tak  $n^2$  je deliteľné 4 a ak  $n$  je nepárne tak  $n^2$  má zvyšok 1.*

**Tvrdenie 2.1.2.** *Ak pre celé čísla  $a, b, c$  platí rovnosť  $a^2 + b^2 = c^2$ , tak aspoň jedno z čísel  $a, b$  je párne.*

**Tvrdenie 2.1.3.** *Nech  $n$  je prirodzené číslo. Ak  $n^2$  je deliteľné štyrmi, tak  $n$  je párne.*

#### 2.1.2 Matematická indukcia

#### 2.1.3 Drobné rady ako dokazovať

#### 2.1.4 Výroky, logické spojky, tautológie

**Definícia 2.1.4.** *Negáciou výroku  $P$  rozumieme výrok „neplatí  $P$ “. Označujeme ju  $\neg P$ .*

*Pre dva výroky  $P$  a  $Q$  nazývame ich konjunkciou výrok „ $P$  a  $Q$ “, označujeme  $P \wedge Q$ .*

*Disjunkcia je výrok „ $P$  alebo  $Q$ “, označujeme  $P \vee Q$ .*

*Pod implikáciou rozumieme výrok „ak platí  $P$ , tak platí  $Q$ “, označujeme  $P \Rightarrow Q$ .*

*Ekvivalencia výrokov  $P$  a  $Q$  je výrok „ $P$  platí práve vtedy, keď platí  $Q$ “, označujeme  $P \Leftrightarrow Q$ .*

#### 2.1.5 Negácia výrokov s kvantifikátormi

### 2.2 Množiny a zobrazenia

#### 2.2.1 Množiny

**Definícia 2.2.1.** *Vzťah byť prvok množiny zapisujeme ako  $x \in A$ , čítame „ $x$  patrí  $A$ “.*

*Hovoríme, že množiny  $A$  a  $B$  sa rovnajú (označujeme  $A = B$ ), ak platí*

$$(x \in A) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in B)$$

pre ľubovoľný prvok  $x$ .

*Množiny, ktorá nemá nijaké prvky nazývame prázdna množina a označujeme  $\emptyset$ .*

**Definícia 2.2.2.** Hovoríme, že  $A$  je *podmnožinou*  $B$ , ak každý prvok množiny  $A$  patrí aj do  $B$ , označujeme  $A \subseteq B$ . Inak povedané,  $A \subseteq B$  ak pre každé  $x$  platí

$$(x \in A) \quad \Rightarrow \quad (x \in B).$$

Vzťah množín  $A$  a  $B$ , pre ktoré platí  $A \subseteq B$  sa tiež zvykne nazývať *inklúzia*.

**Definícia 2.2.3.** *Zjednotenie* dvoch množín  $A$  a  $B$  je množina

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}.$$

*Prienik* dvoch množín  $A$  a  $B$  je množina

$$A \cap B = \{x \in A; x \in B\}.$$

*Rozdiel* dvoch množín  $A$  a  $B$  je množina

$$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$$

**Definícia 2.2.4.** Ak  $A$ ,  $B$  sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc  $(a, b)$  takých, že  $a \in A$  a  $b \in B$ . Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

## 2.2.2 Zobrazenia

**Definícia 2.2.5.** *Zobrazenie*  $f: X \rightarrow Y$  z množiny  $X$  do množiny  $Y$  je podmnožina  $f$  množiny  $X \times Y$  taká, že ku každému  $x \in X$  existuje práve jedno  $y \in Y$  s vlastnosťou  $(x, y) \in f$ .

Množinu  $X$  budeme tiež nazývať *definičný obor* zobrazenia  $f$  a množina  $Y$  je *obor hodnôt* zobrazenia  $f$ .

Namiesto zápisu  $(x, y) \in f$  budeme používať zápis  $y = f(x)$ .

**Definícia 2.2.6.** Hovoríme, že dve zobrazenia  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Z \rightarrow W$  sa *rovnajú*, ak  $X = Z$ ,  $Y = W$  a  $f(x) = g(x)$  pre každé  $x \in X$ . (Inými slovami, ak sa rovnajú ich definičné obory, obory hodnôt a obe zobrazenia nadobúdajú v každom bode rovnakú hodnotu.) Rovnosť zobrazení označujeme  $f = g$ .

**Definícia 2.2.7 (Skladanie zobrazení).** Ak  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení*  $f$  a  $g$  nazývame zobrazenie  $g \circ f: X \rightarrow Z$  také, že pre každé  $x \in X$  platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

**Tvrdenie 2.2.8 (Asociatívnosť skladania zobrazení).** *Nech*  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $h: Z \rightarrow W$  sú zobrazenia, potom

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

**Definícia 2.2.9.** Nech  $f: X \rightarrow Y$  je zobrazenie. Hovoríme, že  $f$  je *injektívne (prosté) zobrazenie* (alebo tiež *injekcia*), ak pre všetky  $x, y \in X$  také, že  $x \neq y$  platí  $f(x) \neq f(y)$ .

Hovoríme, že  $f$  je *surjekcia (surjektívne zobrazenie, zobrazenie na)*, ak pre každé  $y \in Y$  existuje také,  $x \in X$ , že  $f(x) = y$ .

Hovoríme, že  $f$  je *bijekcia (bijektívne zobrazenie)*, ak  $f$  je súčasne injekcia aj surjekcia.

**Tvrdenie 2.2.10.** Zloženie dvoch injekcií je injekcia, zloženie dvoch surjekcií je surjekcia, zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.

**Definícia 2.2.11.** Zobrazenie  $id_X: X \rightarrow X$  také, že  $id_X(x) = x$  pre každé  $x \in X$  sa nazýva *identické zobrazenie (identita)*.

**Definícia 2.2.12.** Nech  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow X$  sú zobrazenia. Ak platí

$$g \circ f = id_X$$

$$f \circ g = id_Y$$

tak hovoríme, že zobrazenie  $g$  je *inverzné zobrazenie k  $f$* . Inverzné zobrazenie k zobrazeniu  $f$  označujeme  $f^{-1}$ .

**Tvrdenie 2.2.13.** Inverzné zobrazenie k  $f$  existuje práve vtedy, keď  $f$  je bijekcia.

**Tvrdenie 2.2.14.** Nech  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow Z$  sú bijekcie. Potom

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

**Dôsledok 2.2.15.** Ak  $f$  je bijekcia, tak aj  $f^{-1}$  je bijekcia.

### 2.2.3 Vzor a obraz množiny\*

**Definícia 2.2.16.** Nech  $f: X \rightarrow Y$  je zobrazenie,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ . Množinu

$$f[A] = \{f(a); a \in A\}$$

nazývame *obrazom* množiny  $A$  v zobrazení  $f$ . Množinu

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

nazývame *vzorom* množiny  $B$  v zobrazení  $f$ .

## 2.3 Permutácie

**Definícia 2.3.1.** Ak  $M$  je konečná množina, tak bijekciu  $\varphi: M \rightarrow M$  budeme nazývať *permutáciou množiny  $M$* .

# Kapitola 3

## Grupy a polia

### 3.1 Binárne operácie

**Definícia 3.1.1.** Binárna operácia  $*$  na množine  $A$  je zobrazenie z množiny  $A \times A$  do  $A$ .

Namiesto  $*(a, b)$  budeme používať označenie  $a * b$ , tento zápis budeme niekedy skracovať ako  $ab$ .

**Definícia 3.1.2.** Nech  $*$  je binárna operácia na množine  $M$ . Hovoríme, že  $e \in M$  je *ľavý neutrálny prvok* operácie  $*$ , ak pre všetky  $m \in M$  platí

$$e * m = m.$$

Podobne,  $e$  je *pravý neutrálny prvok*, ak

$$m * e = m$$

pre každé  $m \in M$ .

Ak  $e$  je súčasne ľavý aj pravý neutrálny prvok operácie  $*$ , hovoríme, že  $e$  je *neutrálny prvok*.

**Tvrdenie 3.1.3.** Nech  $*$  je binárna operácia na množine  $M$ . Ak  $e_1$  je jej ľavý neutrálny a  $e_2$  je jej pravý neutrálny prvok, tak  $e_1 = e_2$ .

*Špeciálne, ak má binárna operácia  $*$  na množine  $M$  neutrálny prvok, tak tento neutrálny prvok je jediný.*

**Definícia 3.1.4.** Binárna operácia  $*$  na množine  $M$  je *komutatívna*, ak pre všetky  $x, y \in M$  platí

$$x * y = y * x.$$

**Definícia 3.1.5.** Binárna operácia  $*$  na množine  $M$  je *asociatívna*, ak pre všetky  $x, y, z \in M$  platí

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

**Definícia 3.1.6.** Nech  $*$  je binárna operácia na množine  $M$ . Nech  $a \in M$  a nech  $e$  je neutrálny prvok operácie  $*$ . Prvok  $b \in M$  je *inverzný* k prvku  $a$ , ak platí

$$a * b = b * a = e.$$

V prípade, že platí  $a * b = e$ ,  $b$  nazývame *pravý inverzný prvok* k  $a$ . Ak  $b * a = e$ , tak  $b$  je *ľavý inverzný prvok* k  $a$ .

**Tvrdenie 3.1.7.** Nech  $*$  je asociatívna operácia na množine  $M$  a  $*$  má neutrálny prvok  $e$ . Ak existuje inverzný prvok k  $a$ , tak je jednoznačne určený.

### 3.1.1 Zovšeobecnený asociatívny zákon\*

**Tvrdenie 3.1.8 (Zovšeobecnený asociatívny zákon).** *Nech  $\cdot$  je asociatívna binárna operácia na množine  $A$ . Potom súčin  $a_1 * a_2 * \dots * a_n$  nezávisí od spôsobu uzátvorkovania.*

## 3.2 Grupy

**Definícia 3.2.1.** Dvojica  $(G, *)$ , kde  $G$  je množina a  $*$  je binárna operácia na  $G$ , sa nazýva *grupa*, ak

- (i) operácia  $*$  je asociatívna,
- (ii) operácia  $*$  má neutrálny prvok, (neutrálny prvok budeme spravidla označovať  $e$ )
- (iii) ku každému prvku  $g \in G$  existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu  $*$ . (Tento inverzný prvok budeme označovať  $g^{-1}$ .)

**Definícia 3.2.2.** Grupa  $(G, *)$  sa nazýva *komutatívna*, ak operácia  $*$  na  $G$  je komutatívna. (Tiež sa používa termín *abelovská grupa*.)

**Veta 3.2.3 (Zákony o krátení).** *Ak  $(G, *)$  je grupa, tak pre ľubovoľné  $a, b, c \in G$  platí*

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\Rightarrow b = c \\ b * a = c * a &\Rightarrow b = c \end{aligned}$$

**Veta 3.2.4.** *Nech  $(G, *)$  je grupa. Potom pre ľubovoľné  $a, b \in G$  platí*

$$\begin{aligned} (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$

## 3.3 Polia

**Definícia 3.3.1.** Nech  $F$  je množina,  $+$  a  $\cdot$  sú binárne operácie na  $F$ . Hovoríme, že trojica  $(F, +, \cdot)$  je *pole*, ak

- (i)  $(F, +)$  je komutatívna grupa, jej neutrálny prvok budeme označovať  $0$ ;
- (ii)  $(F \setminus \{0\}, \cdot)$  je komutatívna grupa, jej neutrálny prvok budeme označovať  $1$ ;
- (iii) pre ľubovoľné  $a, b, c \in F$  platí

$$\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac, \\ (a + b)c &= ac + bc. \end{aligned}$$

(Túto vlastnosť nazývame *distributívnosť*.)

Pre inverzný prvok v grupe  $(F, +)$  budeme používať označenie  $-a$ , t.j. pre túto grupu používame aditívny zápis. Prvok  $-a$  nazývame *opačný prvok* k prvku  $a$ .

Pre grupu  $(F \setminus \{0\}, \cdot)$  budeme používať multiplikatívny zápis, teda inverzný prvok k prvku  $a \neq 0$  poľa  $F$  vzhľadom na operáciu  $\cdot$  budeme značiť  $a^{-1}$ . Ak použijeme termín *inverzný prvok* v súvislosti s poľom a nešpecifikujeme binárnu operáciu, myslí sa tým práve prvok  $a^{-1}$ .

Namiesto  $b + (-c)$  budeme používať stručnejší zápis  $b - c$ .



**Definícia 3.3.2.** Pole je množina  $F$ , na ktorej sú definované 2 binárne operácie  $+$  a  $\cdot$  spĺňajúce:

- (i) pre všetky  $a, b, c \in F$  platí  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ,
- (ii) pre všetky  $a, b \in F$  platí  $a + b = b + a$ ,
- (iii) existuje prvok  $0 \in F$  taký, že pre každé  $a \in F$  sa  $a + 0 = a$ ,
- (iv) ku každému  $a \in F$  existuje  $b \in F$  tak, že  $a + b = 0$ ,
- (v) pre všetky  $a, b, c \in F$  platí  $a.(b.c) = (a.b).c$ ,
- (vi) pre všetky  $a, b \in F$  platí  $a.b = b.a$ ,
- (vii) existuje prvok  $1 \in F$  taký, že pre každé  $a \in F$  sa  $a.1 = a$ ,
- (viii) ku každému  $a \in F$ ,  $a \neq 0$  existuje  $b \in F$  tak, že  $a.b = 1$ ,
- (ix) pre všetky  $a, b, c \in F$  sa  $a.(b + c) = a.b + a.c$ .

**Tvrdenie 3.3.3.** *Nech  $(F, +, \cdot)$  je pole. Potom pre  $a, b, c \in F$  platí*

- (i)  $a.0 = 0$ ,  $0.a = 0$ ,
- (ii)  $a.b = b.a$ ,
- (iii)  $(-a).b = -a.b$ ,
- (iv)  $(-a).(-b) = a.b$ ,
- (v)  $a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ ,
- (vi)  $a.b = a.c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$ ,
- (vii)  $a.a = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$ .

**Definícia 3.3.4.** Nech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Množinu  $\mathbb{Z}_n$  definujeme ako  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ . (Teda množina  $\mathbb{Z}_n$  obsahuje všetky možné zvyšky po delení číslom  $n$ .)

Na množine  $\mathbb{Z}_n$  zavedieme operácie  $\oplus$  a  $\odot$  predpisom

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (a + b) \bmod n, \\ a \odot b &= (ab) \bmod n, \end{aligned}$$

kde operácia mod označuje zvyšok po delení číslom  $n$  (pozri dodatok A).

**Definícia 3.3.5.** Číslo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , nazývame *zloženým číslom*, ak  $n = m.k$  pre nejaké  $m, k \in \mathbb{N}$  také, že  $1 < m, k < n$ .

Ak  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , nie je zložené, tak ho nazývame *prvočíslo*.

Číslo 1 nepovažujeme ani za prvočíslo ani za zložené číslo.

**Veta 3.3.6.** *Ak  $p$  je prvočíslo, tak  $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$  je pole.*

**Definícia 3.3.7.** Ak  $n$  je celé číslo a  $a, b$  sú prvky poľa  $F$ , tak definujeme  $n \times a$  takto:

$$0 \times a = 0,$$

$$(n + 1) \times a = n \times a + a \text{ (zatiaľ sme to indukciou definovali pre prirodzené čísla),}$$

Ak  $n > 0$  tak definujeme  $(-n) \times a = -(n \times a)$  (tým sme rozšírili definíciu aj na záporné čísla).

Podobne definujeme pre  $a \neq 0$ :

$$a^0 = 1,$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a,$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} \text{ (} n > 0 \text{)}.$$

# Kapitola 4

## Vektorové priestory

### 4.1 Vektorový priestor

**Definícia 4.1.1.** Nech  $F$  je pole a  $V \neq \emptyset$  je množina. Nech  $+$  je binárna operácia na  $V$  a každej dvojici  $c \in F$ ,  $\vec{\alpha} \in V$  je priradený prvok  $c.\vec{\alpha} \in V$ , pričom platí pre ľubovoľné  $c, d \in F$  a  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ :

(i)  $(V, +)$  je komutatívna grupa,

(ii)  $c.(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c.\vec{\alpha} + c.\vec{\beta}$ ,

(iii)  $(c + d).\vec{\alpha} = c.\vec{\alpha} + d.\vec{\alpha}$ ,

(iv)  $(c.d).\vec{\alpha} = c.(d.\vec{\alpha})$ ,

(v)  $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ .

Potom hovoríme, že  $V$  je *vektorový priestor* nad polom  $F$ .

**Veta 4.1.2.** Nech  $V$  je vektorový priestor nad polom  $F$ ,  $c \in F$  a  $\vec{\alpha} \in V$ .

(a)  $0.\vec{\alpha} = \vec{0}$ ,

(b)  $c.\vec{0} = \vec{0}$ ,

(c)  $c.\vec{\alpha} = \vec{0}$  práve vtedy, keď  $c = 0$  alebo  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ,

(d)  $(-c).\vec{\alpha} = -c.\vec{\alpha}$ .

### 4.2 Podpriestory

**Definícia 4.2.1.** Ak  $V$  je vektorový priestor nad polom  $F$ ,  $S \neq \emptyset$  a  $S \subseteq V$ , tak  $S$  nazveme *podpriestorom* (alebo tiež *vektorovým podpriestorom*) priestoru  $V$ , ak

(i) pre ľubovoľné  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$  platí  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$ ,

(ii) pre ľubovoľné  $\vec{\alpha} \in S$  a  $c \in F$  platí  $c.\vec{\alpha} \in S$ .

**Tvrdenie 4.2.2 (Kritérium vektorového podpriestoru).** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$  a  $S \subseteq V$ ,  $S \neq \emptyset$ . Potom  $S$  je podpriestor  $V$  práve vtedy, keď pre ľubovoľné  $c, d \in F$  a  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$  platí*

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \quad \Rightarrow \quad c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S. \quad (4.1)$$

**Veta 4.2.3.** *Ak  $S$  a  $T$  sú podpriestory vektorového priestoru  $V$ , tak aj  $S \cap T$  je podpriestor  $V$ .*

**Dôsledok 4.2.4.** *Nech  $n \in \mathbb{N}$ . Ak  $S_1, S_2, \dots, S_n$  sú podpriestory priestoru  $V$ , tak aj  $\bigcap_{i=1}^n S_i$  je podpriestor priestoru  $V$ .*

**Veta 4.2.5.** *Nech  $I$  je ľubovoľná množina a  $S_i$  je podpriestor priestoru  $V$  pre každé  $i \in I$ . Potom aj  $\bigcap_{i \in I} S_i$  je podpriestor priestoru  $V$ .*

## 4.3 Lineárna kombinácia, lineárna nezávislosť

### 4.3.1 Lineárna kombinácia a lineárny obal

**Definícia 4.3.1.** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Hovoríme, že vektor  $\vec{\alpha}$  je lineárnou kombináciou vektorov  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ , ak existujú skaláry  $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$  také, že*

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Skaláry  $c_1, c_2, \dots, c_n$  nazývame *koefficienty lineárnej kombinácie*.

**Tvrdenie 4.3.2.** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Ak  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ , tak množina*

$$M = \{c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n; n \in \mathbb{N}, c_i \in F, \vec{\alpha}_i \in V \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\}$$

*je podpriestor vektorového priestoru  $V$ .*

*Tento podpriestor nazývame lineárny obal vektorov  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$  alebo podpriestor generovaný vektormi  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ . Označujeme ho*

$$M =: [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n].$$

*Ak platí  $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$ , hovoríme, že vektory  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$  generujú vektorový priestor  $V$ .*

**Lema 4.3.3.** *Ak  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$ , kde  $S$  je podpriestor vektorového priestoru  $V$  nad poľom  $F$ , aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia  $c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n$  patrí do podpriestoru  $S$ .*

**Veta 4.3.4.** *Ak  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$ , kde  $S$  je podpriestor vektorového priestoru  $V$  nad poľom  $F$ , tak  $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] \subseteq S$ .*

**Veta 4.3.5.** *Nech  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ ,  $\vec{\beta} \in V$ , kde  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Potom  $\vec{\beta}$  je lineárnou kombináciou vektorov  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$  práve vtedy, keď*

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}].$$

### 4.3.2 Lineárna nezávislosť

**Definícia 4.3.6.** Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sú *lineárne závislé*, ak existujú  $c_1, \dots, c_n \in F$ , ktoré nie sú všetky nulové a platí

$$c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}.$$

(Stručne:  $\vec{0}$  je nenulovou lineárnou kombináciou vektorov  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ .)

V opačnom prípade hovoríme, že vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  *lineárne nezávislé*.

**Veta 4.3.7.** Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Nech  $n$  je prirodzené číslo,  $n \geq 2$  a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ . Vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sú *lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných*.

**Veta 4.3.8.** Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Nech  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$  sú vektory také, že  $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$ . Vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sú *lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich*.

**Veta 4.3.9.** Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$  sú *lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich*.

**Veta 4.3.10 (Steinitzova veta o výmene).** Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Ak  $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$  (vektorový priestor  $V$  je generovaný vektormi  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ ) a  $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$  sú *lineárne nezávislé vektory, tak*

- (i)  $s \leq n$ ,
- (ii) z vektorov  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sa dá vybrať  $n - s$  vektorov, ktoré spolu s vektormi  $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s$  generujú  $V$ .

## 4.4 Báza a dimenzia

**Definícia 4.4.1.** Nech  $V$  je vektorový priestor. Hovoríme, že  $V$  je *konečnorozmerný* ak existuje taká konečná množina vektorov  $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ , že platí  $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$ .

**Definícia 4.4.2.** Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$ . Množinu vektorov  $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$  nazývame *bázou* priestoru  $V$ , ak

- (i) vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sú *lineárne nezávislé*,
- (ii)  $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$ .

(Stručne: Báza je taká množina lineárne nezávislých vektorov, ktorá generuje celý priestor.)

**Veta 4.4.3.** *Ľubovoľné dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru  $V$  majú rovnaký počet prvkov.*

**Veta 4.4.4.** Nech  $V$  je konečnorozmerný vektorový priestor. Ak  $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$  sú *lineárne nezávislé, tak sa dajú doplniť na bázu priestoru  $V$ .*

**Dôsledok 4.4.5.** *Každý konečnorozmerný vektorový priestor  $V \neq \{\vec{0}\}$  má bázu.*

**Definícia 4.4.6.** *Dimenziou* konečnorozmerného vektorového priestoru  $V$  nazývame počet prvkov ľubovoľnej jeho bázy. (Pre nulový priestor dodefínujeme  $d(\{\vec{0}\}) = 0$ .) Toto číslo označujeme  $d(V)$ .

**Dôsledok 4.4.7.** Ak  $V$  je konečnorozmerný vektorový priestor a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sú lineárne nezávislé vo  $V$ , tak  $n \leq d(V)$ .

**Veta 4.4.8.** Nech  $V$  je konečnorozmerný vektorový priestor a  $d(V) = n$ . Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i)  $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$  je báza priestoru  $V$ ,
- (ii) vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sú lineárne nezávislé,
- (iii)  $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$ .

**Veta 4.4.9.** Nech  $V$  je vektorový priestor. Vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  tvoria bázu priestoru  $V$  právetedy, keď každý vektor  $\vec{\beta}$  sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

**Veta 4.4.10.** Ľubovoľný podpriestor  $S$  konečnorozmerného priestoru  $V$  je konečnorozmerný. Navyše,  $d(S) \leq d(V)$ .

**Tvrdenie 4.4.11.** Ak  $S$  je podpriestor konečnorozmerného vektorového priestoru  $V$  a  $d(S) = d(V)$ , tak  $S = V$ .

## 4.5 Lineárne a direktné súčty podpriestorov

**Veta 4.5.1.** Nech  $S, T$  sú vektorové podpriestory vektorového priestoru  $V$  nad poľom  $F$ . Potom

$$S + T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\alpha} \in S, \vec{\beta} \in T\}$$

je podpriestorom vektorového priestoru  $V$ .

**Definícia 4.5.2.** Ak  $S, T$  sú podpriestory vektorového podpriestoru  $V$ , tak vektorový podpriestor  $S + T$  sa nazýva *lineárny súčet* podpriestorov  $S$  a  $T$ .

**Veta 4.5.3.** Nech  $S$  a  $T$  sú podpriestory vektorového priestoru  $V$  nad poľom  $F$ . Nech  $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$ ,  $T = [\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$ . Potom  $S + T = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$ .

**Veta 4.5.4.** Nech  $S, T$  sú podpriestory konečnorozmerného priestoru  $V$ . Potom<sup>1</sup>

$$d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T).$$

**Definícia 4.5.5.** Nech  $S, T$  sú podpriestory vektorového priestoru  $V$  nad poľom  $F$  a nech  $S \cap T = \{\vec{0}\}$ . Potom podpriestor  $S + T$  nazývame *direktný (priamy) súčet* podpriestorov  $S$  a  $T$  a označujeme ho  $S \oplus T$ .

**Veta 4.5.6.** Nech  $S, T, P$  sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru  $V$  nad poľom  $F$ . Tieto podmienky sú potom ekvivalentné:

- (i)  $P = S \oplus T$
- (ii)  $P = S + T$  a  $d(P) = d(S) + d(T)$
- (iii) Ak  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  je báza podpriestoru  $S$  a  $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$  je báza podpriestoru  $T$ , tak  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$  je báza podpriestoru  $P$ .
- (iv)  $P = S + T$  a každý vektor  $\vec{\gamma} \in P$  sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ , kde  $\vec{\alpha} \in S$  a  $\vec{\beta} \in T$ . (T.j. ak  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2$ , pričom  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in S$  a  $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in T$ , tak  $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$  a  $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2$ .)

<sup>1</sup>Tento vzorec pripomína vzorec pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín  $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$ .

# Kapitola 5

## Lineárne zobrazenia a matice

### 5.1 Matice

**Definícia 5.1.1.** *Maticou* typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa  $F$ , ktorá má  $m$  riadkov a  $n$  stĺpcov.

**Definícia 5.1.2.** Nech  $A, B$  sú matice typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  a  $c \in F$ .

(a) Súčet matíc  $A = \|a_{ij}\|$  a  $B = \|b_{ij}\|$  je matica  $A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\|$ .

(b) Matica  $c.A = \|ca_{ij}\|$  sa nazýva  $c$ -násobok matice  $A$ .

(Teda sčítovanie matíc a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.)

**Veta 5.1.3.** *Matice typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  s takto definovaným sčítovaním a násobením skalármi tvoria vektorový priestor nad poľom  $F$ .*

**Definícia 5.1.4.** Maticu typu  $n \times n$  (teda takú, ktorá má rovnaký počet riadkov a stĺpcov) nazývame *štvorcová matica*.

Maticu

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

typu  $n \times n$ , ktorá má na diagonále jednotky a mimo diagonály nuly, nazývame *jednotková matica*.

Štvorcová matica, ktorá má mimo diagonály iba nuly (t.j.  $a_{ij} = 0$  pre  $i \neq j$ ) sa nazýva *diagonálna matica*. (Príkladom diagonálnej matice je jednotková matica.)

**Definícia 5.1.5.** *Transponovaná matica* k matici  $A$  typu  $m \times n$  je matica  $A^T$  typu  $n \times m$  určená ako

$$A^T = \|a_{ji}\|.$$

Štvorcová matica  $A$  sa nazýva *symetrická*, ak  $A = A^T$  a *antisymetrická*, ak  $A = -A^T$ .

## 5.2 Riadková ekvivalencia a hodnosť matice

**Definícia 5.2.1.** *Podpriestorom prislúchajúcim matici  $A$  typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  nazývame podpriestor priestoru  $F^n$  generovaný riadkami matice  $A$ . Označujeme ho  $V_A$ .*

**Definícia 5.2.2.** *Elementárne riadkové operácie na matici  $A$  nad poľom  $F$  sú:*

1. výmena 2 riadkov matice,
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom  $c$  poľa  $F$ ,
3. pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Hovoríme, že matice  $A$  a  $B$  sú *riadkovo ekvivalentné* ak maticu  $B$  možno z  $A$  dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice  $A$  a  $B$  sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako  $A \sim B$ .

**Veta 5.2.3.** *Elementárne riadkové operácie nemenia podpriestor prislúchajúci danej matici. (Teda riadkovo ekvivalentným maticiam zodpovedá rovnaký podpriestor.)*

**Definícia 5.2.4.** *Matica  $A$  je redukovaná trojuholníková matica, ak:*

- (i) Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.
- (ii) Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.
- (iii) Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami.
- (iv) Vedúci prvok ľubovoľného nenulového riadku je napravo od vedúcich prvkov všetkých nenulových riadkov nad ním a naľavo od vedúcich prvkov riadkov pod ním (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava).

**Veta 5.2.5.** *Každá matica nad poľom  $F$  je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

**Veta 5.2.6.** *Nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé.*

**Definícia 5.2.7.** *Hodnosť matice  $A$  je dimenzia priestoru  $V_A$  prislúchajúceho tejto matici. Označujeme ju  $h(A)$ .*

**Lema 5.2.8.** *Nech  $A$  je redukovaná trojuholníková matica typu  $m \times n$  nad poľom  $F$ . Označme jej nenulové riadky  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$  a ako  $i_1, \dots, i_k$  označme čísla stĺpcov, v ktorých sú vedúce jednotky. Potom  $\vec{\alpha} = (c_1, \dots, c_n) \in V_A$  práve vtedy, keď  $\vec{\alpha} = c_{i_1}\vec{\alpha}_1 + c_{i_2}\vec{\alpha}_2 + \dots + c_{i_k}\vec{\alpha}_k$ .*

**Veta 5.2.9.** *Ak  $A$  a  $B$  sú redukované trojuholníkové matice rovnakého typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  a  $V_A = V_B$ , tak  $A = B$ .*

**Dôsledok 5.2.10.** *Nech  $A$  a  $B$  sú matice typu  $m \times n$  nad poľom  $F$ . Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:*

- (i)  $A$  a  $B$  sú riadkovo ekvivalentné,
- (ii)  $V_A = V_B$ ,
- (iii)  $A$  a  $B$  sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.



### 5.3 Lineárne zobrazenia

**Definícia 5.3.1.** Ak  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je zobrazenie z  $V$  do  $W$ , tak hovoríme, že  $f$  je *lineárne zobrazenie*, ak pre ľubovoľné  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$  a ľubovoľné  $c \in F$  platí

$$(i) f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}),$$

$$(ii) f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha}).$$

**Veta 5.3.2.** Nech  $V, W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(a) zobrazenie  $f$  je lineárne,

(b)  $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$  pre ľubovoľné  $c, d \in F$  a ľubovoľné  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ ,

(c)  $f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_nf(\vec{\alpha}_n)$  pre ľubovoľné  $c_1, \dots, c_n \in F, \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ .

**Tvrdenie 5.3.3.** Ak  $f$  je lineárne zobrazenie, tak  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ .

**Veta 5.3.4.** Nech  $V, W$  sú vektorové priestory. Nech  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  je báza priestoru  $V$  a nech  $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$ . Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$  také, že

$$f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$$

pre  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definícia 5.3.5.** Nech  $F$  je pole. Matica lineárneho zobrazenia  $f: F^m \rightarrow F^n$  je matica typu  $m \times n$  ktorej  $k$ -ty riadok je vektor  $f(\vec{e}_k)$ .

**Veta 5.3.6.** Nech  $U, V, W$  sú vektorové priestory nad tým istým poľom  $F$ . Ak  $f: U \rightarrow V$  a  $g: V \rightarrow W$  sú lineárne zobrazenia, tak aj  $g \circ f$  je lineárne zobrazenie.

### 5.4 Súčin matíc

**Definícia 5.4.1.** Ak  $A$  je matica typu  $m \times n$  a  $B$  je matica typu  $n \times k$  nad poľom  $F$ , tak maticu  $C = \|\|c_{ij}\|\|$  typu  $m \times k$ , kde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}$$

pre  $i = 1, 2, \dots, m$  a  $j = 1, 2, \dots, k$ , nazývame *súčin matíc*  $A$  a  $B$ . Označujeme ju  $A.B$ .

**Veta 5.4.2.** Nech  $F$  je pole,  $f: F^m \rightarrow F^n$  a  $g: F^n \rightarrow F^k$  sú lineárne zobrazenia. Potom platí

$$A_{g \circ f} = A_f.A_g$$

**Dôsledok 5.4.3.** Násobenie matíc je asociatívne, teda

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

pre ľubovoľné matice také, že ich možno násobiť v uvedenom poradí.

**Veta 5.4.4.** *Nech matice  $A, B, C$  nad poľom  $F$  sú majú také rozmery, že uvedené súčty a súčiny majú zmysel.*

$$\begin{aligned} I_m A &= A = A I_n \\ A(B + C) &= AB + AC \\ (B + C)D &= BD + CD \end{aligned}$$

## 5.5 Inverzná matica

**Veta 5.5.1.** *Ak  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie  $f^{-1}: W \rightarrow V$ , tak  $f^{-1}$  je lineárne zobrazenie.*

**Lema 5.5.2.** *Nech  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  je báza priestoru  $V$ .*

- (i) *Zobrazenie  $f$  je injekcia práve vtedy, keď vektory  $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$  sú lineárne nezávislé.*
- (ii) *Zobrazenie  $f$  je surjekcia práve vtedy, keď  $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$  (teda ak vektory  $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$  generujú celý priestor  $W$ ).*

**Veta 5.5.3.** *Nech  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  je báza priestoru  $V$ . Zobrazenie  $f$  je bijekcia práve vtedy, keď vektory  $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$  tvoria bázu vektorového priestoru  $W$ .*

**Dôsledok 5.5.4.** *Nech  $f: F^n \rightarrow F^n$  je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (i)  *$f$  je bijekcia,*
- (ii)  *$f$  je prosté,*
- (iii)  *$f$  je surjektívne.*

**Dôsledok 5.5.5.** *Nech  $f: F^n \rightarrow F^n$  je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (a) *zobrazenie  $f$  je bijekcia,*
- (b) *existuje inverzné zobrazenie  $f^{-1}$ ,*
- (c)  *$h(A_f) = n$ .*

**Definícia 5.5.6.** *Nech  $A$  je matica typu  $n \times n$ . Hovoríme, že matica  $B$  je inverzná k matici  $A$ , ak platí*

$$AB = BA = I_n.$$

Označujeme ju  $B =: A^{-1}$ .

**Definícia 5.5.7.** *Štvorcová matica typu  $n \times n$  sa nazýva regulárna, ak  $h(A) = n$ .*

**Veta 5.5.8.** *Nech  $A$  je matica typu  $n \times n$ . K matici  $A$  existuje inverzná matica práve vtedy, keď  $A$  je regulárna.*

**Definícia 5.5.9.** *Bijektívne lineárne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$  nazývame izomorfizmus vektorových priestorov  $V$  a  $W$  (alebo tiež lineárny izomorfizmus).*

Ak existuje bijektívne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$ , hovoríme, že vektorové priestory  $V$  a  $W$  sú izomorfné. Fakt, že  $V$  a  $W$  sú izomorfné označujeme  $V \cong W$ .

**Veta 5.5.10.** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$  a  $d(V) = n$ . Potom  $V$  je izomorfný s priestorom  $F^n$ .*

## 5.6 Elementárne riadkové operácie a súčin matic

**Definícia 5.6.1.** Pre ľubovoľnú elementárnu riadkovú operáciu na matici typu  $m \times n$  nazveme *maticou elementárnej riadkovej operácie* maticu typu  $m \times m$ , ktorá vznikne vykonaním tejto operácie na jednotkovej matici  $I_m$ .

**Tvrdenie 5.6.2.** Ak matica  $B$  vznikne z matice  $A$  vykonaním nejakej elementárnej riadkovej operácie a  $E$  je matica tejto riadkovej operácie, tak  $B = E.A$ .

**Tvrdenie 5.6.3.** Ak matica  $B$  vznikne z matice  $A$  vykonaním nejakej elementárnej stĺpcovej operácie a  $E$  je matica tejto stĺpcovej operácie, tak  $B = A.E$ .

## 5.7 Sústavy lineárnych rovníc

**Definícia 5.7.1.** *Sústavou lineárnych rovníc* rozumieme systém rovníc tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde  $a_{ij}, c_i \in F$  pre všetky prípustné hodnoty indexov  $i$  a  $j$ .

*Riešenie* sústavy lineárnych rovníc je  $n$ -ticia  $(x_1, \dots, x_n)$  ktorá spĺňa všetky uvedené rovnice. Ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy lineárnych rovníc, hovoríme, že táto sústava je *riešiteľná*. Skaláry  $c_1, \dots, c_n$  nazývame *pravé strany*,  $a_{ij}$  sú *koefficienty* a  $x_i$  sú *neznáme*.

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *matica sústavy* (5.1).

Maticu

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírená matica sústavy* (5.1).

**Veta 5.7.2.** Ak rozšírené matice dvoch sústav lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto dve sústavy majú rovnakú množinu riešení.

### 5.7.1 Homogénne sústavy lineárnych rovníc

**Veta 5.7.3.** Množina všetkých riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc tvorí podpriestor priestoru  $F^n$ .

$$\begin{aligned} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{1,n}x_n &= 0 \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{2,n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

**Veta 5.7.4.** Vektory  $\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \dots, \vec{\gamma}_n$  tvoria bázu priestoru riešení homogénnej sústavy (5.2).

**Dôsledok 5.7.5.** Nech  $A$  je matica typu  $m \times n$  a  $S$  je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s maticou  $A$ . Potom

$$d(S) = n - h(A).$$

**Dôsledok 5.7.6.** Homogénna sústava lineárnych rovníc s  $n$  neznámymi, ktorej matica má hodnosť  $n$ , má len triviálne riešenie.

**Veta 5.7.7.** Každý podpriestor priestoru  $F^n$  je množinou riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc.

## 5.7.2 Gaussova eliminačná metóda

### 5.7.3 Frobeniova veta

**Veta 5.7.8.** Pre každú maticu  $A$  nad poľom  $F$  platí  $h(A) = h(A^T)$ .

**Veta 5.7.9 (Frobeniova).** Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (5.1) je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnosť, t.j.

$$h(A) = h(A').$$

**Veta 5.7.10.** Nech  $\vec{\alpha}$  je riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T \tag{N}$$

a  $S$  je podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení homogénneho systému

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{0}^T. \tag{H}$$

Potom  $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$  je množina všetkých riešení (N).

## 5.8 Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

**Definícia 5.8.1.** Nech  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie. Potom *jadrom lineárneho zobrazenia  $f$*  nazývame množinu

$$\text{Ker } f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a *obrazom lineárneho zobrazenia  $f$*  nazývame množinu

$$\text{Im } f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$

**Tvrdenie 5.8.2.** Nech  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie. Potom  $\text{Ker } f$  je vektorový podpriestor priestoru  $V$  a  $\text{Im } f$  je vektorový podpriestor priestoru  $W$ .

**Tvrdenie 5.8.3.** Nech  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie.

Zobrazenie  $f$  je injektívne práve vtedy, keď  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ .

**Tvrdenie 5.8.4.** *Nech  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie.*

*Zobrazenie  $f$  je surjektívne práve vtedy, keď  $\text{Im } f = W$ .*

**Dôsledok 5.8.5.** *Lineárne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$  je izomorfizmus práve vtedy, keď  $\text{Im } f = W$  a  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ .*

**Veta 5.8.6.** *Nech  $V$  a  $W$  sú konečnorozmerné vektorové priestory a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie. Potom*

$$d(V) = d(\text{Ker } f) + d(\text{Im } f).$$

## 5.9 Hodnosť transponovanej matice

# Kapitola 6

## Determinanty

### 6.1 Motivácia

### 6.2 Definícia determinantu

**Definícia 6.2.1.** V tejto kapitole budeme označovať ako  $S_n$  množinu všetkých permutácií množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Dvojica  $(\varphi(k), \varphi(s))$  sa volá *inverzia* permutácie  $\varphi$ , ak  $k < s$  ale  $\varphi(k) > \varphi(s)$ . Počet inverzií permutácie  $\varphi$  budeme označovať  $i(\varphi)$ .

**Definícia 6.2.2.** Nech  $A$  je matica typu  $n \times n$  nad poľom  $F$ ,  $A = ||a_{ij}||$ . *Determinant matice*  $A$  je

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. \quad (6.1)$$

**Veta 6.2.3.** Nech  $A$  je matica typu  $n \times n$ . Potom

$$|A| = |A^T|.$$

### 6.3 Výpočet determinantov

#### 6.3.1 Laplaceov rozvoj

**Veta 6.3.1.** Pre algebraický doplnok prvku  $a_{rs}$  štvorcovej matice  $A$  platí

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} |M_{rs}|$$

**Dôsledok 6.3.2 (Laplaceov rozvoj determinantu).** Nech  $A$  je matica typu  $n \times n$ . Potom

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |M_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |M_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |M_{in}| \quad (6.2)$$

$$|A| = (-1)^{j+1} a_{1j} |M_{1j}| + (-1)^{j+2} a_{2j} |M_{2j}| + \dots + (-1)^{j+n} a_{nj} |M_{nj}| \quad (6.3)$$

#### 6.3.2 Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

**Veta 6.3.3.** Ak maticu  $B$  získame z  $A$  vynásobením  $k$ -teho riadku skalárom  $c \in F$ , tak

$$|B| = c|A|.$$

**Dôsledok 6.3.4.** Ak matica  $A$  má nulový riadok, tak  $|A| = 0$ .

**Veta 6.3.5.** Ak má matica  $A$  dva rovnaké riadky, tak  $|A| = 0$ .

**Veta 6.3.6.** Nech matice  $A$  a  $B$  sú matice typu  $n \times n$ , ktoré sa líšia len v  $k$ -tom riadku. Potom  $|A| + |B| = |C|$ , kde  $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$  pre  $i \neq k$  a  $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$ .

**Veta 6.3.7.** Ak matica  $B$  vznikne z  $A$  pripočítaním  $c$ -násobku niektorého riadku k inému (pričom  $c \in F$ ), tak  $|B| = |A|$ .

**Veta 6.3.8.** Ak matica  $B$  vznikne z  $A$  vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak  $|B| = -|A|$ . (Výmena 2 riadkov matice mení znamienko determinantu.)

**Veta 6.3.9.** Ak  $A$  je horná trojuholníková matica (pod hlavnou diagonálou má nuly), tak determinant matice  $A$  sa rovná súčinu prvkov na diagonále.

$$|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

**Dôsledok 6.3.10.** Determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu diagonálnych prvkov.

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

**Veta 6.3.11.** Nech  $A$  je štvorcová matica typu  $n \times n$ . Matica  $A$  je regulárna práve vtedy, keď  $|A| \neq 0$ .

## 6.4 Determinant súčinu matíc

**Veta 6.4.1.** Nech  $A, B$  sú dve matice typu  $n \times n$  nad poľom  $F$ . Potom platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

## 6.5 Využitie determinantov

### 6.5.1 Výpočet inverznej matice

**Veta 6.5.1.** Ak  $A$  je regulárna matica typu  $n \times n$ , tak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

kde  $A_{ij}$  označuje algebraický doplnok prvku  $a_{ij}$ .

### 6.5.2 Cramerovo pravidlo

**Dodatok A**

**Delenie so zvyškom**



## Dodatok B

# Komplexné čísla

### B.1 Definícia komplexných čísel, algebraický tvar komplexného čísla

**Definícia B.1.1.** *Komplexným číslom* budeme nazývať ľubovoľné číslo tvaru

$$a + bi,$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Množinu všetkých komplexných čísel označujeme

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zápis komplexného čísla v tvare  $a + bi$  nazývame *algebraický zápis* komplexného čísla. Pritom  $a$  sa nazýva *reálna časť* komplexného čísla a  $bi$  sa nazýva *imaginárna časť* komplexného čísla. Pre komplexné číslo  $z = a + bi$  označujeme jeho reálnu časť  $\operatorname{Re} z = a$  a imaginárnu časť  $\operatorname{Im} z = bi$ . (Niekedy sa tiež používa označenie  $\Re z$  a  $\Im z$ .) Číslo, ktoré má nulovú reálnu časť, sa nazýva *rydzoimaginárne*.

Komplexné číslo je jednoznačne určené svojou reálnou a imaginárnou časťou, teda dve komplexné čísla  $z_1 = a_1 + b_1i$  a  $z_2 = a_2 + b_2i$  sa rovnajú práve vtedy, keď

$$a_1 = a_2 \quad \text{a} \quad b_1 = b_2.$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (\text{B.1})$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \quad (\text{B.2})$$

**Veta B.1.2.** *Komplexné čísla s operáciami  $+$  a  $\cdot$  definovanými vzťahmi (B.1) a (B.2) tvoria pole.*

**Definícia B.1.3.** *Komplexne združeným číslom* k číslu  $z = a + bi$  nazývame číslo  $\bar{z} = a - bi$ .

### B.2 Geometrická interpretácia komplexných čísel, goniometrický tvar, Moivrova veta

**Definícia B.2.1.** Zápis komplexného čísla v tvare

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

nazývame *goniometrický zápis* komplexného čísla. Číslo  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  nazývame *absolútna hodnota* alebo tiež *modul* komplexného čísla  $z$  a označujeme ho  $|z|$ . Číslo  $\varphi$  také, že  $a = r \cos \varphi$  a  $b = r \sin \varphi$  nazývame *argument* komplexného čísla  $z$ .

**Veta B.2.2 (Moivrova veta).** *Nech  $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  a  $z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$ . Potom pre ich súčin platí*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \quad (\text{B.3})$$

*Špeciálne z toho vyplýva, že pre absolútne hodnoty platí*

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \quad (\text{B.4})$$

**Dôsledok B.2.3.** *Ak  $n \in \mathbb{N}$  a  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , tak*

$$z^n = r^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

### B.3 Riešenie rovníc v komplexných číslach

**Veta B.3.1 (Základná veta algebry).** *Každý polynóm s komplexnými koeficientami má koreň v  $\mathbb{C}$ . T.j. ak*

$$f(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0,$$

*tak existuje  $z \in \mathbb{C}$  také, že  $f(z) = 0$ .*

#### B.3.1 Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

#### B.3.2 Binomické rovnice

#### B.4 Zopár ďalších vecí súvisiacich s komplexnými číslami