Cvičenie 2

Homomorfizmy, izomorfizmy

Na pripomenutie: Homomorfizmus $f\colon (G,\circ) \to (H,*)$

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$$

Bijektívny homomorfizmus voláme izomorfizmus (injektívny homomorfizmus voláme monomorfizmus, surjektívny monomorfizmus voláme epimorfizmus).

Ak existuje epimorfizmus $f\colon (G,*)(H,\circ) \to$, tak hovoríme, že grupa H je homomorfným obrazom grupy G.

1. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné a grupa H je homomorfným obrazom grupy G. Svoju odpoveď zdôvodnite!
   a) $G = (\mathbb{R},+) \times (\mathbb{R},+)$, $H = (\mathbb{C},+)$
   b) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{R},+)$
   c) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{Q}^+,\cdot)$

2. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné a či je niektorá z nich homomorfným obrazom druhej. Svoju odpoveď zdôvodnite!
   a) $G = (\mathbb{R},+)$, $H = (\mathbb{R}^+,\cdot)$
   b) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{R}^+,\cdot)$
   c) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$
   d) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$
   e) $G = (\mathbb{Z}_4,\oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\oplus)$

3. Nech $(G,\circ)$ je grupa. Je zobrazenie $g \mapsto g^{-1}$ izomorfizmus z G na G? Ak nie, vedeli by ste definovať binárnu operáciu $*$ na G, tak, aby toto zobrazenie bol izomorfizmus grúp $(G,\circ)$ a $(G,*)$? Je uvedené zobrazenie izomorfizmom, ak G je komutatívna?

4. Nech $f\colon G \to H$ je homomorfizmus grúp. Dokážte:
   a) Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = H$.
   b) Zobrazenie g je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

5. a) Dokážte, že $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ s operáciou $*$ definovanou ako $(a,b)*(c,d) = (ac - bd, ad+bc)$ tvorí grupu.
   b) Dokážte, že všetky nenulové matice tvaru $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ tvoria s násobením matíc grupu. (Hint k obom častiam úlohy: Možno vám pomôže nájsť jednoduchšie riešenie to, že táto úloha je v časti o homomorfizmoch.)

6. Nech $g\colon G \to G'$ a $h\colon H \to H'$ sú homomorfizmy grúp. Potom aj zobrazenie $f\colon G\times H \to G'\times H'$ dané predpisom $f(x,y) = (g(x),h(y))$ je homomorfizmus. Ak g a h sú izomorfizmy (surjektívne homomorfizmy/injektívne homomorfizmy), tak f je izomorfizmus (surjektívny homomorfizmus/injektívny homomorfizmus).

Cyklické grupy

Na pripomenutie: *Cyklická grupa* je grupa G, ktorá je generovaná nejakým jej prvkom $a \in G$, t.j. $G = [a]$. Prvok a sa volá *generátor* cyklickej grupy G.

Ak G je cyklická grupa a a je jej generátor, tak $G = \{a^n; n \in \mathbb{Z}\}$, t.j. G pozostáva práve z mocnín generátora a.

1. Nech $f\colon (G, *) \to (H, \circ)$ je homomorfizmus. Dokážte, že potom platí:
   a) $f(a^n) = f(a)^n$
   b) $a^n = e_G \Rightarrow f(a)^n = e_H$
   c) Ak f je navyše izomorfizmus, tak $a^n = e_G \Rightarrow f(a)^n = e_H$.
   d) Izomorfizmus zachováva rád prvku, t.j. rád prvku a v grupe G je rovnaký ako rád prvku $f(a)$ v grupe H.

2. Nech $(G, *)$ je cyklická grupa a a je jej generátor. Potom ľubovoľný homomorfizmus z G do nejakej grupy $(H, \circ)$ je jednoznačne určený obrazom prvku a.

3. Nájdite všetky izomorfizmy medzi $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ a $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot)$.

4. Nájdite všetky homomorfizmy:
   a) zo $\mathbb{Z}_4$ do $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
   b) zo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ do $\mathbb{Z}_4$,

5. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné. Svoju odpoveď zdôvodnite!
   a) $G = (\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \odot)$, $H = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$
   b) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Q}, +)$
   c) $G = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$, $(\mathbb{Z}_2, \oplus) \times (\mathbb{Z}_3, \oplus)$

6. Ak rád prvku a v grupe G je n a e je neutrálny prvok tejto grupy, tak pre prirodzené čísla $k \in \mathbb{N}$ platí $a^k = e$ práve vtedy, keď $n \mid k$. Ďalej pre každé $s \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $a^s = a^m$ a $0 \leq m \leq n - 1$.