Cvičenie 3

Permutácie

Na pripomenutie: Každú permutáciu vieme (jednoznačne) rozložiť na disjunktné cykly, z tohoto rozkladu vieme zistiť jej rád a paritu. Pre cykly ľahko vieme vyrátať inverznú permutáciu: $(1324)^{-1} = (4231)$.
Každý cyklus možno zapísať viacerými spôsobmi: $(1324) = (3241) = (2413) = (4132)$.

Disjunktné permutácie (a teda aj disjunktné cykly) komutujú.

Permutácie vieme rozložiť aj na transpozície. Cykly vieme rozložiť napríklad takto:
$(a_1a_2 \dots a_n) = (a_1a_n)(a_1a_{n-1}) \dots (a_1a_2)$ alebo $(a_1a_2 \dots a_n) = (a_{n-1}a_n) \dots (a_2a_n)(a_1a_n)$
Permutácia je *párna* $\Leftrightarrow$ má párny počet inverzií $\Leftrightarrow$ dá sa rozložiť na párny počet transpozícií. Pri skladaní permutácií sa parita permutácií správa podobne ako parita celých čísel pri sčitovaní.

1. V tomto cvičení budeme pracovať s permutáciami množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (čiže prvkami grupy S_8) a budeme zadané permutácie aj výsledky vždy zapisovať ako súčiny disjunktných cyklov: Označme
$\varphi = (14)(235)(78)$
$\psi = (234)(67)$
$\tau = (135)(24)(68)$
a) Vypočítajte $(\varphi \circ \psi) \circ \tau$ a $\varphi \circ (\psi \circ \tau)$
b) Ku každej z uvedených permutácií vypočítajte inverznú permutáciu.
c) Zistite rád a paritu permutácií φ, ψ, τ a aj permutácií, ktoré sme dostali ako výsledky v predchádzajúcich častiach tejto úlohy.

2. Pre dané permutácie určte rád, paritu, a rozklad na disjunktné cykly:
$\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\psi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
Ďalej vypočítajte permutácie $\varphi\tau\psi$, φ^{-1}, τ^{-1}, ψ^{-1}.

3. Vypočítajte $\varphi \circ \psi$ a $\psi \circ \varphi$ pre:
a) $\varphi = (14)(5678)$, $\psi = (23)(5678)$
b) $\varphi = (124)(5678)$, $\psi = (23)(5678)$.
Je niektorý z týchto prípadov príkladom nedisjunktných permutácií, ktoré komutujú?

4. Izomorfizmus grupy G na samú seba voláme *automorfizmus*. Dokážte, že:
a) Množina $\operatorname{Aut} G$ všetkých automorfizmov grupy G je grupou transformácií.
b) Definujeme pre ľubovoľné $a \in G$ zobrazenie $f_a \colon G \to G$ ako $f_a(g) = aga^{-1}$. Potom platí $f_{ab} = f_a \circ f_b$ pre ľubovoľné $a, b \in G$.
c) Pre každé $a \in G$ je zobrazenie f_a automorfizmus grupy G (takýto automorfizmus nazveme vnútorný).
d) Množina $\operatorname{VAut} G$ všetkých vnútorných automorfizmov grupy G je grupou transformácií.
e) Grupa G je komutatívna práve vtedy, keď množina $\operatorname{VAut} G$ všetkých jej vnútorných automorfizmov je jednoprvková.
f) Zobrazenie $a \mapsto f_a$ je surjektívny homomorfizmus z G na $\operatorname{VAut} G$. Nájdite jadro tohoto automorfizmu.

5. Budeme sa zaoberať automorfizmami z predchádzajúcej úlohy v špeciálnom prípade $G = S_n$. Nech $\varphi \in S_n$. Dokáže, že:
a) Ak $\psi_{1,2}$ sú disjunktné permutácie, tak aj permutácie $f_\varphi(\psi_1)$ a $f_\varphi(\psi_2)$ sú disjunktné.
b) Ak $\psi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, tak $f_\varphi(\psi) = (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n))$; t.j. cyklus sa zobrazí

na cyklus rovnakej dĺžky.
c) Štruktúra rozkladu permutácií ψ a $f_\varphi(\psi) = \varphi\psi\varphi^{-1}$ je rovnaká. (Tým rozumieme: rovnaký počet disjunktných cyklov v rozklade, jednotlivé cykly majú rovnaké dĺžky.)

6. Ak počet inverzií permutácie $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{smallmatrix}\right)$ je k, zistite počet inverzií permutácie $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Dokážte, že grupa S_n je generovaná:
   a) Množinou všetkých transpozícií.
   b) Množinou transpozícií $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$.
   c) Množinou transpozícií $\{(12), (23), \dots, (n-1, n)\}$.
   d) Transpozíciou (12) a cyklom $(12\dots n)$. (Hint: Skúste vyrátať $(12\dots n)^{-k}(12)(12\dots n)^k$.)

8. Dokážte, že alternujúca grupa A_n je generovaná:
   a) Množinou všetkých cyklov (ijk) dĺžky 3.
   b) Množinou cyklov dĺžky 3 tvaru $(123), (124), \dots, (12n)$.

Cyklické grupy II

1. Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre každé $k \mid n$ existuje k-prvková podgrupa grupy $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$.

2. V každej grupe majú nasledujúce prvky rovnaký rád: x a yxy^{-1}; ab a ba; abc, bca a cab. Naopak, prvky abc a cba môžu mať rôzny rád. (Hint: Jedna možnosť ako dokázať, že dva prvky $g, h \in G$ majú rovnaký rád je dokázať ekvivalenciu $x^n = e \Leftrightarrow y^n = e$. Iná možnosť je nájsť izomorfizmus $f\colon G \to G$ taký, že $f(g) = h$, a použiť fakty, že izomorfizmy zachovávajú rád prvkov.)

3. Nech $a, b \in G$, kde G je grupa, $a, b \neq 1$ také, že $ab = ba$ a $b^3 = 1$. Dokážte, že $\{a^n, ba^n, b^2a^n; n \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa grupy G.

4. Ak rád prvku a v grupe G je n a e je neutrálny prvok tejto grupy, tak pre prirodzené čísla $k \in \mathbb{N}$ platí $a^k = e$ práve vtedy, keď $n \mid k$. Ďalej pre každé $s \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $a^s = a^m$ a $0 \leq m \leq m - 1$.