Cvičenie 4

Rozklad grupy podľa podgrupy

Na pripomenutie: Ak H je podgrupa G, tak ľavé triedy

$$aH = \{ah; h \in H\}$$

tvoria ľavý rozklad G podľa H. (Podobne pravé triedy tvoria pravý rozklad.)

Počet ľavých a pravých tried je rovnaký, značíme ho $[G : H]$. Platí $|G| = [G : H]|H|$ (Lagrangeova veta).

1. Ak G je konečná grupa, H je podgrupa G a K je podgrupa H, tak platí rovnosť $[G : K] = [G : H][H : K]$.

2. Nájdite všetky ľavé (pravé) triedy grupy G podľa podgrupy H, ak
   a) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \mathbb{Z}$;
   b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 3x\}$;
   c) $G = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$, $H = 2\mathbb{Z}_3$;
   d) $G = S_n$, $H = A_n$;
   e) $G = S_3$, $H = [(12)]$;
   f) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 3\mathbb{Z}$.
   (Pod „nájdite všetky triedy“ sa rozumie to, že pre každú triedu vyberieme jedného reprezentanta, v prípade, že ide o konečné množiny ich môžeme aj vypísať.)

3. Ak p je prvočíslo a $k \geq 1$ prirodzené číslo, tak každá p^k-prvková grupa má p-prvkovú podgrupu.

4. a) Nech $f : A \to B$ je surjektívne zobrazenie. Dokážte, že relácia R na množine A určená predpisom $aRa' \Leftrightarrow f(a) = f(a')$ je relácia ekvivalencie a triedy rozkladu sú množiny $f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(b)$ pre $b \in B$.
   b) Nech R je relácia ekvivalencie na množine A a nech B je množina všetkých tried ekvivalencie. Dokážte, že zobrazenie $f : A \to B$, ktoré každému prvku priradí jeho triedu ekvivalencie (teda $f : a \mapsto [a]$) je surjektívne.
   c) V predchádzajúcej časti sme každému surjektívnemu zobrazeniu priradili reláciu ekvivalencie a obrátene. Dokážte, že tieto dve priradenia sú navzájom inverzné.

Normálne podgrupy

Podgrupu H grupy G voláme normálna (invariantná), ak spĺňa niektorú z týchto (ekvivalentných) podmienok:

(i) $aH = Ha$ pre všetky $a \in G$,

(ii) $aH \subseteq Ha$ pre všetky $a \in G$,

(iii) $Ha \subseteq aH$ pre všetky $a \in G$,

(iv) $aHa^{-1} \subseteq H$ pre všetky $a \in G$,

(v) $aHa^{-1} = H$ pre všetky $a \in G$,

(vi) $\{aH; a \in G\} = \{Hb; b \in G\}$.

Podmienku (iv) môžeme prepísať ako

$$h \in H \qquad \Rightarrow \qquad aha^{-1} \in H.$$

Každá podgrupa komutatívnej grupy je normálna. Najjednoduchší príklad nekomutatívnej grupy, ktorý poznáme, je $(S_3, \circ)$.

	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
id	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	id	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	id	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	id	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	id
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	id	(123)

1. V grupe $(S_3, \circ)$ nájdite:
   a) všetky podgrupy,
   b) všetky normálne podgrupy.

2. Ak H je podgrupa G a $[G : H] = 2$, tak H je normálna podgrupa. Navyše, pre každý prvok $G \setminus H$ platí $x^2 \in H$.

3. Ak H a H' sú normálne podgrupy G také, že $H \cap H' = \{e\}$, tak $hh' = h'h$ pre ľubovoľné $h \in H$ a $h' \in H'$ (ľubovoľný prvok H komutuje s ľubovoľným prvkom H'.)

4. Dokážte, že ľubovoľná normálna podgrupa A_n pre $n \geq 5$, ktorá obsahuje aspoň jeden cyklus dĺžky 3 je celá grupa A_n.

5. Uvažujme grupu G všetkých zhodných izometrií[1] roviny nemeniacich orientáciu. Inak povedané, sú to všetky zobrazenia, ktoré môžeme dostať ako zloženie posunutia o nejaký vektor $\vec{u}$ a otočenia o nejaký uhol α, čiže zobrazenia dané predpisom $(x, y) \mapsto (c + x\cos\alpha + y\sin\alpha, d - x\sin\alpha + y\cos\alpha)$. Sú nasledujúce grupy normálnymi podgrupami grupy G?
   a) $H =$ všetky posunutia;
   b) $H =$ rotácie okolo počiatku súradnicovej sústavy;
   c) $H_x =$ všetky zobrazenia z G také, že $f(x) = x$, pričom $x \in \mathbb{R}^2$ je nejaký pevne zvolený bod roviny.

[1] izometria=zobrazenie zachovávajúce vzdialenosti; zhodné = zachovávajú aj orientáciu