

Cvičenie 6

Faktorové grupy

Veta o izomorfizme: Ak $f: G \rightarrow G'$ je homomorfizmus grúp, tak $\text{Ker } f$ je normálna podgrupa grupy G a faktorová grupa $G/\text{Ker } f$ je izomorfná s podgrupou $\text{Im } f$ grupy G' .

1. Nech G je grupa všetkých regulárnych matic typu $n \times n$ (s operáciou násobenia matic). Ako H označme tie z nich, ktoré majú determinant $|A| = 1$. Dokážte, že H je invariantná podgrupa G ! Vedeli by ste nájsť grupu izomorfnú s G/H ?
2. Overte, či H je normálna podgrupa grupy G a opíšte faktorovú grupu G/H (aké má triedy, vybrať z každej triedy práve jedného reprezentanta, zistiť, či je izomorfná s nejakou známou grupou).
 - a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$
 - b) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$
 - c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$
 - d) $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$, $H = [(2, 2)]$
 - e) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = \{(n, m, 0); n, m \in \mathbb{Z}\}$
 - f) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}; c^6 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
3. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$
 - a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / \{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / \mathbb{R}^+$ (pod \mathbb{R}^+ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S
 - b) $(\mathbb{R}, +) / \mathbb{Z}$, S / C_n , S
 - c) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / C_n$
 - d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot) / \mathbb{R}^+$, C_n
 - e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot) / C_n$, \mathbb{R}^+
 - f) C_{12} / C_4 , \mathbb{Z}_3
 - g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +) / (\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, \mathbb{Z}_3
 - h) $S_3 / [(123)]$, $(\mathbb{Z}_2, +)$
4. Ukážte, že \mathbb{Q}/\mathbb{Z} (obe grupy berieme so sčítovaním) je nekonečná grupa, v ktorej má každý prvok konečný rád.
5. Nech H je normálna podgrupa G , $\varphi: G \rightarrow G/H$ je kanonický homomorfizmus a $X \subset G$. Dokážte: Ak $\varphi[X]$ generuje G/H , tak $H \cup X$ generuje G .
6. Centrom grupy G nazývame množinu $Z(G) = \{g \in G; (\forall h \in G) gh = hg\}$ takých prvkov, ktoré komutujú so všetkými prvkami G . Ukážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa grupy G .
7. Nech H je podgrupa G . Ukážte, že systém $\{HaH; a \in G\}$ je rozklad množiny G .