

Cvičenie 7

Okruhy, ideály, faktorizácia

Na pripomenutie: Veta o izomorfizme platí pre okruhy v rovnakom znení ako pre grupy (iba normálne podgrupy sa nahradia ideálmi).

Ak nech R je komutatívny okruh s jednotkou a I je ideál v R , tak:

R/I je pole práve vtedy, keď I je maximálny ideál,

R/I je oborom integrity práve vtedy, keď I je vlastný prvoideál.

Každý maximálny ideál je prvoideál.

1. Nech F je pole a $I \neq \emptyset$. Nech dokážte, že v okruhu F^I je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in F^I; f(p) = 0\}$, kde p je nejaký prvok z I , maximálny. (Hint: Je faktorový okruh poľom?)
2. Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je I_n ideál v okruhu R a navyše platí $I_n \subseteq I_{n+1}$, tak aj zjednotenie $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ je ideál v R .
3. Nech R je komutatívny okruh s jednotkou. Dokážte, že v ňom platí binomická veta

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}.$$

4. Nech R je ľubovoľný komutatívny okruh a $a \in R$. Potom množina $\{ax; x \in R\}$ je ideál v R . Tento ideál označujeme (a) a takéto ideály nazývame hlavné.
5. Zistite, s akými okruhmi sú izomorfné okruhy $\mathbb{Z}_{60}/(15)$, $\mathbb{Z}_{60}/(20)$, $\mathbb{Z}_{60}/(12)$.
6. Zistite, či dané ideály v okruhu $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$ (s obvyklým sčítaním a násobením komplexných čísel) sú maximálne ideály/prvoideály.
 - a) $(1 + i) = \{(1 + i)z; z \in \mathbb{C}\}$
 - b) $(2) = \{2z; z \in \mathbb{C}\}$
 - c*) $(2 + i) = \{(2 + i)z; z \in \mathbb{C}\}$
7. Ak I_1, I_2 sú ideály v komutatívnom okruhu $(R, +, \cdot)$, tak aj
 - a) $I_1 + I_2 = \{a + b; a \in I_1, b \in I_2\}$ je ideál v R .
 - b) $I_1 \cdot I_2 = \{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n; n \in \mathbb{N}, a_i \in I_1, b_i \in I_2\}$ je ideál v R .
8. Nech $(G, *)$ je cyklická grupa, a je jej generátor, t.j. $G = [a]$. Ak definujeme operáciu \cdot ako $a^k \cdot a^l = a^{k \cdot l}$ (pre ľubovoľné $k, l \in \mathbb{Z}$), tak $(G, *, \cdot)$ je okruh. Viete povedať (v závislosti od rádu generátora a) s akým okruhom je tento okruh izomorfný?