Cvičenie 9

Rozšírenia polí

Ak K je nadpole F, hovoríme, že K je rozšírenie F. V prípade, že K tvorí konečnorozmerný vektorový priestor nad F, hovoríme o konečnom rozšírení. V takomto prípade dimenziu tohoto vektorového priestoru označujeme $[K : F]$ a voláme stupeň rozšírenia.

Ak $F \subseteq L \subseteq K$ sú konečné rozšírenia, tak platí

$$[K : F] = [K : L].[L : F].$$

Algebraický prvok $u \in K$ je taký prvok, pre ktorý existuje polynóm $f(x) \in F[x]$ taký, že $f(u) = 0$ (t.j. u je koreňom F). Normovaný polynóm najmenšieho možného stupňa s touto vlastnosťou

Ak $F \cup \{u_1, \dots, u_k\} \subseteq K$, tak ako $F(u_1, \dots, u_k)$ označujeme najmenšie podpole K obsahujúce $F \cup \{u_1, \dots, u_k\}$. Platí, že $[F(u) : F]$ je rovné stupňu minimálneho polynómu prvku u.

1. Nech L je rozšírenie poľa F a $u \in L$. Dokážte, že ak $[F(u) : F] = 5$, tak $[F(u^2) : F] = 5$.
2. V poli $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nájdite inverzný prvok ku $1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ (treba ho vyjadriť ako $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ pre vhodné $a, b, c \in \mathbb{Q}$.)
3. Nájdite izomorfizmus medzi poľami $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ a $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$.
4. Nájdite minimálne polynómy týchto čísel nad $\mathbb{Q}$:
   a) $\sqrt{2}+1$; b) $2-3\sqrt{5}$; c) $\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}$; d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; e) $\sqrt[3]{2}+i$; f) $1+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; g) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}$; h) $\frac{3+\sqrt{7}}{1+2\sqrt{7}}$.
5. Určite stupeň viacnásobného rozšírenia a nájdite bázu nad $\mathbb{Q}$:
   a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$; b) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$; c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25})$; d) $\mathbb{Q}(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{8})$