Zadania prémiových úloh

V priebehu semestra by tu mali postupne pribúdať zadania prémiových úloh; správne riešenie každej úlohy je za 1 bod.

1. Nech $\circ$ je binárna operácia na G, taká, že:
   a) $\circ$ je asociatívna
   b) $\circ$ má ľavý neutrálny prvok e, teda existuje $e \in G$ taký, že $e \circ a = a$ pre každé $a \in G$
   c) Každý prvok má ľavý inverzný prvok, t.j. ku každému $a \in G$ existuje $b \in G$ také, že $ba = e$ (kde e označuje ľavý neutrálny prvok).
   Dokážte, že $(G, \circ)$ je grupa. Ukážte na príklade, že množina s asociatívnou binárnou operáciou, ktorá má ľavý neutrálny a pravý inverzný prvok ešte nemusí byť grupa.

2. Ak $*$ je asociatívna binárna operácia na G, tak hovoríme, že $(G, *)$ je pologrupa. Dokážte, že konečná pologrupa, v ktorej platia zákony o krátení, je grupa. Platí to aj pre nekonečné pologrupy? (Dokážte alebo nájdite kontrapríklad.)

3. Dokážte, že grupa A_4 párnych permutácií 4-prvkovej množiny nemá žiadnu 6-prvkovú podgrupu. (Kontrapríklad ukazujúci, že neplatí obrátenie Lagrangeovej vety.)

4. a) Dokážte, že v okruhu $C(0,1)$ je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in C(0,1); f(p) = 0\}$ pre $p \in \langle 0,1 \rangle$ maximálny.
   b) Dokážte, že všetky maximálne ideály v $C(0,1)$ majú takýto tvar.

5. Nech G je grupa.
   a) Pre normálnu podgrupu H definujme reláciu R ako $aRb \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$. Dokážte, že táto relácia je kongruencia (definícia je v poznámkach k prednáške). Dokážte, že rozklad zodpovedajúci relácii R je práve rozklad G podľa podgrupy H.
   b) Dokážte, že ak R je kongruencia na G, tak $[e]_R$ je normálna podgrupa G. Navyše, rozklad určený reláciou ekvivalencie R je práve rozklad G podľa tejto podgrupy.
   c) Overte, že priradenia medzi normálnymi podgrupami G a kongruenciami na G z predchádzajúcich častí úlohy sú navzájom inverzné.