Nepovinné domáce úlohy

Všetky úlohy sú 1-bodové. Odovzdávať sa dajú do konca semestra alebo kým sa riešenie úlohy neodprezentuje na cvičení (v prípade, že budete chcieť vidieť, ako sa daná úloha dala riešiť).

1. Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ definujeme stopu matice ako súčet jej diagonálnych prvkov, t.j. $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Overte, či na vektorovom priestore $M_{n,n}(\mathbb{R})$ určuje predpis
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$$
skalárny súčin. (Hint: Možno vám pri tom pomôžu rovnosti $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$. Prvá z nich sa dá ľahko overiť pomocou definície súčinu, druhá je zrejmá.)

2. Overte, že množina
$$V = \ell_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$$
so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po súradniciach je vektorový priestor a
$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$
je skalárny súčin na tomto priestore.

3. Pre kvadratické formy $f = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ a $g = \sum\limits_{i,j} b_{ij}x_ix_j$ definujeme kvadratickú formu $(f, g) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij}x_ix_j$. Ukážte, že ak f a g sú kladne definitné, tak aj (f, g) je kladne definitná.

4. Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Definujme maticu $A = \|a_{ij}\|$ tak, že $a_{ij} = \langle \vec{\alpha_i}, \vec{\alpha_j}\rangle$. Dokážte, že $|A| \geq 0$ a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $|A| > 0$.

5. Nech $|\cdot|\colon V \to \mathbb{R}$ je funkcia definovaná na vektorovom priestore V nad $\mathbb{R}$, ktorá spĺňa podmienky
   (a) $|\vec{\alpha}| \geq 0$
   (b) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
   (c) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$
   (d) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)
   (e) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$ (rovnobežníkové pravidlo)

   Ukážte, že potom existuje skalárny súčin na V taký, že $|\alpha| = \sqrt{\langle\vec{\alpha}, \vec{\alpha}\rangle}$ pre všetky $\vec{\alpha} \in V$.

6. Nech V je vektorový priestor všetkých matíc typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$, nech $A \in V$ nech $T\colon V \to V$ je definované ako $T(X) = AX$. Nájdite charakteristický polynóm matice zobrazenia T a ukážte, že ak matica A je podobná s diagonálnou maticou, tak aj T je podobná s diagonálnou maticou. (Poznámka: Matica zobrazenia T síce závisí od voľby bázy priestoru V, nie je však ťažké si uvedomiť, že charakteristický polynóm ani diagonalizovateľnosť matice sa nemenia prechodom k inej báze, čiže od voľby bázy nezávisia.)