Lineárne zobrazenia a matice

15. novembra 2010

Definícia matice

Definícia

Maticou typu $m \times n$ nad poľom F nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa F, ktorá má m riadkov a n stĺpcov.

Matice zapisujeme v tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

pričom a_{ij} označuje prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci.
Stručnejší zápis: $A = ||a_{ij}||$

Príklad

$\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ je matica typu 2×3 nad $\mathbb{R}$.

Operácie s maticami

Definícia

Nech A, B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F a $c \in F$.

(a) *Súčet matíc* $A = ||a_{ij}||$ a $B = ||b_{ij}||$ je matica $A + B = ||a_{ij} + b_{ij}||$.

(b) Matica $c.A = ||ca_{ij}||$ sa nazýva *c-násobok* matice A.

(Teda sčitovanie matíc a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.)

Veta

Matice typu $m \times n$ nad poľom F s takto definovaným sčitovaním a násobením skalármi tvoria vektorový priestor nad poľom F.

Jednotková matica

Definícia

Maticu typu $n \times n$ (teda takú, ktorá má rovnaký počet riadkov a stĺpcov) nazývame *štvorcová matica*.
Maticu

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

typu $n \times n$ nazývame *jednotková matica*.
Štvorcová matica, ktorá má mimo diagonály iba nuly (t.j. $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$) sa nazýva *diagonálna matica*.

Transponovaná matica

Definícia

Transponovaná matica k matici A typu $m \times n$ je matica A^T typu $n \times m$ určená ako

$$A^T = ||a_{ji}||.$$

Štvorcová matica A sa nazýva *symetrická*, ak $A = A^T$ a *antisymetrická*, ak $A = -A^T$.

$I^T = I$, $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$ a $(cA)^T = cA^T$

Transponovaná matica

Príklad

Ak $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, tak $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Matica $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ je symetrická, matica $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ je antisymetrická.

Podpriestor prislúchajúci matici

Definícia

Podpriestorom prislúchajúcim matici A typu $m \times n$ nad poľom F nazývame podpriestor priestoru F^n generovaný riadkami matice A. Označujeme ho V_A.

Príklad

Nad poľom $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad V_A = [(1,0,1),(0,1,1)]$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V_I = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \mathbb{R}^3$$

Vidíme, že jednotkovej matici I zodpovedá štandardná báza priestoru $\mathbb{R}^3$, preto jej prislúcha celý priestor $\mathbb{R}^3$.

Riadková ekvivalencia matíc

Definícia

Elementárne riadkové operácie na matici A nad poľom F sú:

1. výmena 2 riadkov matice,
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F,
3. pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Hovoríme, že matice A a B sú *riadkovo ekvivalentné* ak maticu B možno z A dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice A a B sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako $A \sim B$.

Riadková ekvivalencia matíc

Príklad

Nasledujúce matice sme dostali z prvej pomocou elementárnych riadkových operácií. Sú to teda riadkovo ekvivalentné matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podobne sa dajú definovať aj elementárne stĺpcové operácie.

Poznámka

$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

Riadková ekvivalencia matíc

Veta

Elementárne riadkové operácie nemenia podpriestor prislúchajúci danej matici. (Teda riadkovo ekvivalentným maticiam zodpovedá rovnaký podpriestor.)

Redukovaná trojuholníková matica

Definícia

Matica A je *redukovaná trojuholníková matica,* ak:

(i) Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.

(ii) Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.

(iii) Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami.

(iv) Vedúci prvok ľubovoľného nenulového riadku je napravo od vedúcich prvkov všetkých nenulových riadkov nad ním a naľavo od vedúcich prvkov riadkov pod ním (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

Veta

Každá matica nad poľom F je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.

Nech $A \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1s} & * & * & * & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{ks} \neq 0 & * & * & * & a_{ks} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,s} & * & * & * & a_{ns} \end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

Výmena riadkov:

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & b_{1s} \neq 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & *
\end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

b_{1s}^{-1}-násobok prvého riadku:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

Vynulujeme prvky v s-tom stĺpci:

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & c_{2,s+1} & \dots & \dots & c_{2,n} \\
0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & c_{k,s+1} & \dots & \dots & c_{k,n} \\
0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & c_{m+1,s+1} & \dots & \dots & c_{m,n}
\end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

Indukčný predpoklad:

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

Vynulujeme príslušné prvky v prvom riadku:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice

Veta

Nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé.

Príklad

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Riadky: $\vec{\alpha} = (1, 0, 2)$ a $\vec{\beta} = (0, 1, \frac{3}{2})$.

Rovnosť $c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} = \vec{0}$ znamená

$c(1, 0, 2) + d(0, 1, \frac{3}{2}) = (c, d, 2c + \frac{3}{2}d) = (0, 0, 0)$, z čoho dostaneme (porovnaním prvých 2 súradníc) $c = 0$ a $d = 0$.

Vektory $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$ sú lineárne nezávislé.

Hodnosť matice

Definícia

Hodnosť matice A je dimenzia podpriestoru V_A prislúchajúceho tejto matici. Označujeme ju $h(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_A = V_B$$

$$h(A) = h(B) = 2$$

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Príklad

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_A = V_B = [(1,0,2),(0,1,\frac{3}{2})]$.

Otázka: $\vec{\alpha} = (1,4,4) \in V_A$?

$$(1,4,4) = c_1(1,0,2) + c_2(0,1,\frac{3}{2}) = (c_1, c_2, 2c_1 + \frac{3}{2}c_2).$$

Porovnaním prvých dvoch súradníc dostaneme $c_1 = 1$ a $c_2 = 4$. Vektor na pravej strane poslednej rovnice má potom ale tretiu súradnicu rovnú $2.1 + \frac{3}{2}.4 = 8 \neq 4$, čiže vektor $\vec{\alpha}$ nepatrí do V_A.

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Lema

Nech A je redukovaná trojuholníková matica typu $m \times n$ nad poľom F. Označme jej nenulové riadky $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ a ako $i_1, \dots, i_k$ označme čísla stĺpcov, v ktorých sú vedúce jednotky. Potom $\vec{\alpha} = (c_1, \dots, c_n) \in V_A$ práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = c_{i_1}\vec{\alpha}_1 + c_{i_2}\vec{\alpha}_2 + \dots + c_{i_k}\vec{\alpha}_k$.

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Veta

Ak A a B sú redukované trojuholníkové matice rovnakého typu $m \times n$ nad poľom F a $V_A = V_B$, tak $A = B$.

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Príklad

Majme redukovanú trojuholníkovú maticu

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

ktorá má vedúce jednotky v prvom a treťom stĺpci.
Keby platilo $V_A = V_B$ pre

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{25} \end{pmatrix}$$

tak $(0,0,1,1,2) \in V_B$, a teda
$(0,0,1,1,2) = 0.(1, b_{12}, b_{13}, 0, b_{15}) + 1.(0,0,0,1,b_{25})$, čiže
$(0,0,1,1,2) = (0,0,0,1,b_{25})$, spor.

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Dôsledok

Nech A a B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F. Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:

(i) *A a B sú riadkovo ekvivalentné,*

(ii) *$V_A = V_B$,*

(iii) *A a B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Hľadanie chyby v úpravách

Dokázané výsledky môžeme použiť na „polovičnú skúšky správnosti“ pri počítaní RTM.
Vieme však ľahko overiť, či $V_A \subseteq V_B$, ak B je RTM.
Ak nám takáto „poloskúška“ nevyjde vieme dokonca pomerne jednoducho nájsť poslednú úpravu od konca, v ktorej sme spravili chybu.

Postup s chybou: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim}$
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Definícia

Definícia

Ak V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \to W$ je zobrazenie z V do W, tak hovoríme, že f je *lineárne zobrazenie*, ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a ľubovoľné $c \in F$ platí

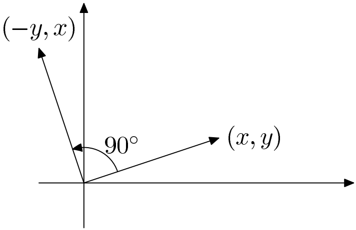
(i) $f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$,

(ii) $f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha})$.

Príklady

Príklad

Otočenie v rovine o 90° je lineárne zobrazenie.



$$f(x, y) = (y, -x)$$

Príklady

Príklad

Zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené predpisom $f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$ je lineárne zobrazenie.

Ekvivalentná podmienka

Veta

Nech V, W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \to W$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(a) *zobrazenie f je lineárne,*

(b) $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$ *pre ľubovoľné $c, d \in F$ a ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$,*

(c) $f(c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1 f(\vec{\alpha}_1) + \ldots + c_n f(\vec{\alpha}_n)$ *pre ľubovoľné $c_1, \ldots, c_n \in F$, $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$.*

Vlastnosti lineárnych zobrazení

Tvrdenie

Ak f je lineárne zobrazenie, tak $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Veta

Nech V, W sú vektorové priestory. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V a nech $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f : V \to W$ také, že

$$f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Matica lineárneho zobrazenia

Štandardná báza v F^n:
$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{\varepsilon}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Definícia

Nech F je pole. *Matica lineárneho zobrazenia* $f\colon F^m \to F^n$ je matica typu $m \times n$ ktorej k-ty riadok je vektor $f(\vec{\varepsilon}_k)$.

Maticu zobrazenia f budeme označovať A_f.
Maticou typu $m \times n$ je jednoznačne určené lineárne zobrazenie $f\colon F^m \to F^n$. Budeme ho označovať f_A.

Matica lineárneho zobrazenia

Príklad

Uvažujme lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané predpisom $f(x, y) = (2x + y, x + y, x + 2y)$. Dosadením zistíme, že platí

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = f(1, 0) = (2, 1, 1)$$
$$f(\vec{\varepsilon}_2) = f(0, 1) = (1, 1, 2)$$

Teda matica tohoto zobrazenia je

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zloženie lineárnych zobrazení

Veta

Nech U, V, W sú vektorové priestory nad tým istým poľom F. Ak $f: U \to V$ a $g: V \to W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je lineárne zobrazenie.

Poznámka

Ľahko sa overí, že ak $f, g: V \to W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj zobrazenia $f + g$ a $c.f$ sú lineárne.

Definícia súčinu matíc

Príklad

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{g\circ f} = ?$

$$g(f(\vec{\delta}_1)) = g(1,0,2) = g(\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_3) =$$
$$= g(\vec{\varepsilon}_1) + 2g(\vec{\varepsilon}_3) = (3,1) + 2.(0,-1) = (3,-1)$$
$$g(f(\vec{\delta}_2)) = g(2,1,1) = g(2\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3) = 2g(\vec{\varepsilon}_1) + g(\vec{\varepsilon}_2) + g(\vec{\varepsilon}_3) =$$
$$= 2.(3,1) + (1,1) + (0,-1) = (7,2)$$

$$A_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Definícia súčinu matíc

$$f : F^m \to F^n \qquad g : F^n \to F^k \qquad g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A_g = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A_{g \circ f} = ?$$

Definícia súčinu matíc

$$g(f(\vec{\delta}_i)) = g(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) =$$

$$g(a_{i1}\vec{\varepsilon}_1 + a_{i2}\vec{\varepsilon}_2 + \dots + a_{in}\vec{\varepsilon}_n) = g(a_{i1}\vec{\varepsilon}_1) + g(a_{i2}\vec{\varepsilon}_2) + \dots + g(a_{in}\vec{\varepsilon}_n) =$$

$$\begin{aligned} &a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}) + \\ &a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k}) + \\ &\vdots \\ &a_{in}(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nk}) = \end{aligned}$$

$$(a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1}, a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{in}b_{n2}, \dots, a_{ik}b_{1k} + a_{i2}b_{2k}$$

Definícia súčinu matíc

Definícia

Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times k$ nad poľom F, tak maticu $C = ||c_{ij}||$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, k$, nazývame *súčin matíc* A a B. Označujeme ju $A.B$.

$$m \times \boxed{n \quad n} \times k$$

Vlastnosti súčinu matíc

Veta

Nech F je pole, $f: F^m \to F^n$ a $g: F^n \to F^k$ sú lineárne zobrazenia. Potom platí

$$A_{g \circ f} = A_f . A_g$$

Dôsledok

Násobenie matíc je asociatívne, teda

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

pre ľubovoľné matice také, že ich možno násobiť v uvedenom poradí.

Vlastnosti súčinu matíc

Veta

Nech matice A, B, C nad poľom F sú majú také rozmery, že uvedené súčty a súčiny majú zmysel.

$$I_m A = A = A I_n$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)D = BD + CD$$

Lineárne zobrazenia a súčin matíc

$f\colon F^m \to F^n$

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}.A_f$$

$$\vec{\alpha}.A = (a_1,\dots,a_m).\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1\\ \vdots\\ \vec{\alpha}_m\end{pmatrix} = a_1\vec{\alpha}_1+\dots+a_m\vec{\alpha}_m =$$

$$a_1 f(\vec{\varepsilon}_1)+\dots+a_n f(\vec{\varepsilon}_n) = f(a_1\vec{\varepsilon}_1+\dots+a_n\vec{\varepsilon}_n) = f(a_1,\dots,a_n) = f(\vec{\alpha}).$$

Lineárne zobrazenia a súčin matíc

Všimnime si, že

$$g(f(\vec{\alpha})) = g(\vec{\alpha}A_f) = \vec{\alpha}(A_f A_g),$$

čiže

$$A_{g\circ f} = A_f A_g.$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Inverzné zobrazenie

$g\colon Y \to X$ je inverzné k $f\colon X \to Y$, ak

$$g \circ f = id_X$$
$$f \circ g = id_Y$$

Označujeme: $g = f^{-1}$.
Inverzné zobrazenie f^{-1} existuje $\Leftrightarrow$ f je bijekcia.

Veta

Ak $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie $f^{-1}\colon W \to V$, tak f^{-1} je lineárne zobrazenie.

Bijektívnosť lineárneho zobrazenia

Lema

Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza V.

(i) *Zobrazenie f je injekcia $\Leftrightarrow$ vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.*

(ii) *Zobrazenie f je surjekcia $\Leftrightarrow$ $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú W).*

Veta

Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V. Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ tvoria bázu vektorového priestoru W.

Bijektívnosť lineárneho zobrazenia

Dôsledok

Nech $f\colon F^n \to F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *f je bijekcia,*
(ii) *f je prosté,*
(iii) *f je surjektívne.*

Dôsledok

Nech $f\colon F^n \to F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(a) *zobrazenie f je bijekcia,*
(b) *existuje inverzné zobrazenie f^{-1},*
(c) *$h(A_f) = n$.*

Definícia

Definícia

Nech A je matica typu $n \times n$. Hovoríme, že matica B je *inverzná* k matici A, ak platí

$$AB = BA = I_n.$$

Označujeme ju $B =: A^{-1}$.

Inverzná matica = matica inverzného zobrazenia.

Poznámka

Pre štvorcové matice platí:
$AB = I \Rightarrow BA = I$

Regulárna matica

Definícia

Štvorcová matica typu $n \times n$ sa nazýva *regulárna*, ak $h(A) = n$.

Veta

Nech A je matica typu $n \times n$. K matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď A je regulárna.

Izomorfizmus

Definícia

Bijektívne lineárne zobrazenie $f: V \to W$ nazývame *izomorfimus vektorových priestorov* V a W (alebo tiež *lineárny izomorfizmus*). Ak existuje bijektívne zobrazenie $f: V \to W$, hovoríme, že vektorové priestory V a W sú izomorfné. Fakt, že V a W sú izomorfné označujeme $V \cong W$.

Dôsledok

Ak V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $V \cong W$, tak $d(V) = d(W)$.

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $d(V) = n$. Potom V je izomorfný s priestorom F^n.