Pickova veta

Veta 1 (Pickova veta). *Ak jednoduchý (=„bez dier“, hranica je súvislá krivka) mnohouholník má za vrcholy mrežové body (=body s celočíselnými súradnicami), tak jeho plocha je rovná*

$$\boxed{S = I + \frac{B}{2} - 1}$$

kde I je počet bodov vo vnútri mnohouholníka B je počet bodov na jeho hranici.

V literatúre sa dá nájsť veľké množstvo dôkazov. Základnou myšlienkou mnohých z nich je ukázať aditivitu výrazu vystupujúceho v Pickovej vete a potom ukázať platnosť pre útvary, z ktorých sa dá ľubovoľný mrežový mnohouholník poskladať. (Často to bývajú trojuholníky, niekedy okrem nich aj obdĺžniky. V mnohých dôkazoch sa dokazuje, že trojuholník, ktorý obsahuje iba 3 mrežové body – jeho vrcholy – musí mať plochu 1/2.)

Ukázali sme si dôkaz z [V] založený na aditivite, dôkaz z [AZ, Chapter 12] pomocou Eulerovej formuly a dôkaz z [MT] využívajúci Minkowského vetu.

Literatúra

[AZ] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer, Berlin, 4th edition, 2010.

[MT] M. Ram Murty and Nithum Thain. Pick's theorem via Minkowski's theorem. *Amer. Math. Monthly*, 114:732–736, 2007.

[V] Dale E. Varberg. Pick's theorem revisited. *Amer. Math. Monthly*, 92(8):584–587, 1985.

Úlohy

1. Nech a, b, c, d sú celé čísla také, že $ad - bc = k > 0$ a $(a, b) = (c, d) = 1$. Dokážte, že existuje práve k usporiadaných dvojíc reálnych čísel (x_1, x_2) takých, že $0 \leq x_1, x_2 < 1$ a čísla $ax_1 + bx_2$ aj $cx_1 + dx_2$ sú celé.
2. Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Dokážte, že existuje n bodov v rovine takých, že vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma z nich je iracionálne číslo a súčasne ľubovoľné tri rôzne body spomedzi nich vytvoria trojuholník s nenulovým racionálnym obsahom. (IMO 1987)
3. Vrcholy trojuholníka so stranami dĺžok a, b, c sú mrežové body a ležia na kruhu s polomerom R. Ukážte, že $abc \geq 2R$. (32nd Putnam)
4. Tri rôzne body s celočíselnými súradnicami v rovine ležia na kružnici s polomerom $r > 0$. Ukážte, že niektoré dva z nich majú vzdialenosť aspoň $r^{1/3}$.
5. Trojuholník ABC v rovine je určený mrežovými bodmi a je ostrouhlý. Ukážte, že obsahuje vnútri alebo na niektorej z jeho strán mrežový bod.
6. Je daných 9 mrežových bodov v trojrozmernom priestore. Ukážte, že vo vnútri niektorej úsečky určenej týmito bodmi existuje mrežový bod. (32nd Putnam)
7. Dokážte, že konvexný päťuholník určený 5 mrežovými bodmi v rovine (žiadne 3 z nich nie sú kolineárne) musí mať plochu aspoň 5/2. (Viete na príklade ukázať, že bez predpokladu konvexnosti to neplatí? Je ohraničenie 5/2 najlepšie možné?) (51st Putnam)
8. V štvorcovej sieti v rovine je daný konvexný päťuholník určený mrežovými bodmi. Priesečníky jeho uhlopriečok utvoria menší päťuholník. Dokážte, že tento menší päťuholník obsahuje (vo vnútri alebo na hranici) aspoň jeden mrežový bod. (Russian MO 2000–2001)