Pellova rovnica

Literatúra k Pellovej rovnici: [JW, B]. Základné veci sa dajú nájsť v mnohých textoch z teórie čísel a v takmer každej knihe venovanej diofantickým rovniciam.

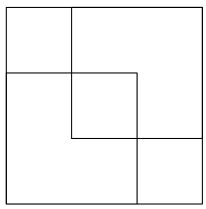
Motivácia, geometrické riešenie 2 špeciálnych prípadov

$\sqrt{2}$ je iracionálne: Vlastne riešime diofantickú rovnicu

$$p^2 = 2q^2$$

pre $p, q \in \mathbb{N}$.

Geometricky

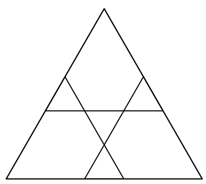


$$p^2 = 2q^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2(p-q)^2 = (2q-p)^2$$

$p > q \Rightarrow p - q > 0$

Z daného riešenia vieme dostať **vždy** menšie riešenie, teda riešenie neexistuje.

$\sqrt{3}$ je iracionálne:



$$p^2 = 3q^2 \qquad \Rightarrow \qquad (2p-3q)^2 = 3(2q-p)^2$$

Vlastne využívame rovnosť:

$$(2x-3y)^2 - 3(2y-x)^2 = x^2 - 3y^2.$$

Malá zmena zadania:

$$x^2 = 2y^2 = 1 \tag{P2}$$ {EQP2}

Vieme uhádnuť riešenia $(1, 0)$, $(3, 2)$.

Z obrázku vidíme, že ak x, y spĺňajú (P2), tak

$$(2y-x)^2 - 2(x-y)^2 = -1.$$

Vlastne sme využili rovnosť

$$2(x-y)^2 - (2y-x)^2 = x^2 - 2y^2.$$

Môžeme si všimnúť, že ak $x^2 = 2y^2 \pm 1$, tak $x^2 \geq 2y^2 - 1 \geq y^2$, a teda $x \geq y$. Dostaneme teda $x - y > 0$, s výnimkou prípadu $x = y = 1$ (riešenie rovnice $x^2 - 2y^2 = -1$.)

Zopakovaním uvedeného postupu pre rovnicu $x^2 - 2y^2 = -1$ dostaneme, že ak (x, y) je riešenie (P2), tak tejto rovnici vyhovuje aj

$$\begin{aligned} \hat{x} &= 3x - 4y, \\ \hat{y} &= 3y - 2x. \end{aligned}$$

Takto sa z každého riešenia dostaneme časom do $(1, 0)$. Obrátene

$$\begin{aligned} x &= 3\hat{x} + 4\hat{y}, \\ y &= 2\hat{x} + 3\hat{y}. \end{aligned}$$

Riešenia v $\mathbb{N}$ sú teda určené rekurenciou

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + 4y_n, \\ y_{n+1} &= 2x_n + 3y_n. \end{aligned}$$

Podobne pre rovnicu

{EQP3} $$x^2 - 3y^2 = 1. \tag{P3}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 3y_n, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n. \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie

Veta 1. *Nech $D \in \mathbb{N}$ nie je štvorec. Potom rovnica*

{EQPELL} $$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{1}$$

má nekonečne veľa riešení v $\mathbb{N}$. Všetky z nich sú určené ako

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1 x_n + D y_1 y_n, \\ y_{n+1} &= y_1 x_n + x_1 y_n, \end{aligned}$$

kde (x_1, y_1) je fundamentálne riešenie, *t.j. najmenšie (=minimalizujúce x) riešenie v $\mathbb{N}$.*

Dôkaz: [AA]. V dôkaze sa vlastne využíva Dirichletova veta (pre iracionálne číslo $\sqrt{D}$), presnejšie povedané tento jej dôsledok:

Dôsledok 2. *Ak α je iracionálne číslo, tak existuje nekonečne veľa racionálnych čísel $x = \frac{p}{q}$ s vlastnosťou*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Dôkaz [K, S].

Z rovnosti

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & Dv_1 \\ v_1 & u_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vidíme, že riešenia sa dajú zapísať pomocou mocnín vlastných čísel tejto matice. Platí konkrétne:

{EQVZOREC}
$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{(u_1+v_1\sqrt{D})^n+(u_1-v_1\sqrt{D})^n}{2},\\
v_n &= \frac{(u_1+v_1\sqrt{D})^n-(u_1-v_1\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Zo vzťahov (2) (a z toho, čo vieme o riešení lineárnych rekurencií) sa dá vcelku ľahko nahliadnuť, že postupnosti (u_n), (v_n) sú riešeniami lineárnej rekurencie

$$x_{n+1} = 2u_1x_n - x_{n-1}$$

pri voľbe počiatočných podmienok $x_0 = 1$, $x_1 = u_1$; resp. $x_0 = 0$, $x_1 = v_1$. (Počiatočné podmienky sú určené fundamentálnym riešením. Na odvodenie tohoto vzťahu si stačí všimnúť, že vlastné hodnoty vystupujúce v (2) sme získali ako riešenia rovnice $(x-u_1)^2 - Dv_1^2 = x^2 - 2u_1x + u_1^2 - Dv_1^2 = x^2 - 2u_1x + 1$. Preto sme zvolili rekurenciu s touto charakteristickou rovnicou.)

Literatúra

[AA] Titu Andreescu and Dorin Andrica. *Number Theory. Structure, Examples, and Problems.* Birkhäuser, Boston, 2009.

[B] Edward J. Barbeau. *Pell's Equation.* Springer-Verlag, New York, 2003. Problem Books in Mathematics.

[JW] Michael J. Jacobson and Hugh C. Williams. *Solving the Pell Equation.* Springer, 2009. CMS Books in Mathematics.

[K] Martin Klazar. Introduction to number theory (lecture notes). `http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/ln_utc.pdf`.

[S] Wolfgang M. Schmidt. *Diophantine Approximations.* Springer-Verlag, Berlin, 1980. Lecture Notes in Mathematics 785.