Nekonečný súčin

Definícia 1. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Hovoríme, že nekonečný súčin konverguje k L a píšeme

$$\prod_{n=1}^{\infty} c_n = L$$

ak $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} c_k = L$ a súčasne $L \neq 0$.

Špeciálne v prípade $L = 0$ hovoríme, že tento nekonečný súčin diverguje k 0.

Jednoduché pozorovanie: Ak $\prod\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, tak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$. Preto sa dosť často zapisujú členy nekonečného súčinu v tvare $c_n = 1 + a_n$.

My potrebujeme nasledujúci výsledok (dôkaz je viac-menej robený podľa [HM, p.79–80]):

Veta 2. *Nech $a_k \in (0,1)$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *rad* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje;*

(ii) *súčin* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_k)$ *konverguje;*

(iii) *súčin* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - a_k)$ *konverguje.*

Lema 3. *Ak $x_1, \dots, x_n \geq 0$, tak platí:*

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \prod_{k=1}^{n} x_k$$
$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geq 1 - \prod_{k=1}^{n} x_k$$

Dôkaz. Prvá nerovnosť je zrejmá. Druhá sa dokáže matematickou indukciou.

Pre $n = 1$ očividne platí, pre $n = 2$ máme $(1 - x_1)(1 - x_2) = 1 - x_1 - x_2 + x_1x_2 \geq 1 - (x_1 + x_2)$.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n - 1$. Potom

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) = (1-x_n)\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k) \geq (1-x_n)(1-\sum_{k=1}^{n-1} x_k) = 1-\sum_{k=1}^{n} x_k + x_n\sum_{k=1}^{n-1} x_k \geq 1-\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

□

Dôkaz vety. Všimnime si, že čiastočné súčiny $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + a_k)$ a $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k)$ tvoria monotónne postupnosti. Aby sme teda ukázali, že majú limitu, stačí overiť ich ohraničenosť.

Najprv predpokladajme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$. Potom existuje k_0 také, že $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \frac{1}{2}$, a teda (s využitím predchádzajúcej lemy)

$$\prod_{k=k_0+1}^{\infty} (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k \geq \frac{1}{2}.$$

Z toho máme

$$1 \geq \prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k) \geq \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{k_0} a_k = C > 0$$

$$1 \leq \prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k) \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k)} \leq \frac{1}{C} < \infty$$

Obidva súčin potom konvergujú.[1]

Teraz predpokladajme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$. Potom máme

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty;$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k) \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)} = 0,$$

čiže oba nekonečné súčiny vystupujúce vo vete divergujú. □

Uvedená veta neplatí, ak pre a_k povolíme ľubovoľné hodnoty. (TODO? Príklad $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$)

Ďalšie zaujímavé fakty o nekonečných súčinoch

$\prod c_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum c_n$ konverguje

Cauchyho podmienka: Nekonečný súčin konverguje práve vtedy, keď pre ľubovoľné ε existuje n_0 s vlastnosťou $\left|\prod_{k=n_0}^{n_0+p} c_p - 1\right| < \varepsilon$.

Pod *absolútnou konvergenciou* rozumieme to, že $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|a_k|)$ konverguje. Z nerovnosti

$$|(1+x_1)\dots(1+x_k)-1| \leq (1+|x_1|)\dots(1+|x_k|)-1$$

Veta 4 (Cauchy)**.** *Nech $x_n > -1$ pre $n \in \mathbb{N}$. Ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, tak existuje aj $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \prod\limits_{k=1}^{n} x_k$. Navyše, táto limita je rovná nule práve vtedy, keď $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \infty$.*

Dôsledok 5 (Coriolisov test)**.** *Ak $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel taká, že rady $\sum\limits_{k=1}^{n} x_n$ aj $\sum\limits_{k=1}^{n} x_n^2$ konvergujú, tak konverguje aj súčin $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+x_n)$.*

Pozri napríklad [RRA].

Literatúra

[HM] James Harkness and Frank Morley. *A Treatise on the Theory of Funcstions.* MacMillan, London, 1893.

[RRA] Teodora-Liliana T. Radulescu, Vincentiu D. Radulescu, and Titu Andreescu. *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on Real Axis.* Springer, Dordrecht, 2009.

[1] Uvedený dôkaz nie je úplne presný. Mali by sme najprv napísať uvedené nerovnosti pre čiastočné súčiny a potom urobiť limitný prechod $n \to \infty$. Predpokladám, že takéto detaily si zvládnete domyslieť.