Prvá prémiová úloha: (6 bodov) Nech $*$ je logická spojka (=binárna boolovská operácia). Dokážte, že pomocou $*$ môžeme dostať všetkých 16 možných logických spojok **práve vtedy, keď** $*$ je určená niektorou z týchto dvoch tabuliek (inak povedané, je to NAND alebo NOR):

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(Stručne: Chceme dokázať, že pomocou spojky NAND, resp. pomocou spojky NOR, vieme dostať všetky logické spojky a už žiadna ďalšia spojka túto vlastnosť nemá.)

Komentár: Logické spojky môžeme chápať ako binárne operácie na množine $\{0,1\}$, čiže funkcie z $\{0,1\} \times \{0,1\}$ do $\{0,1\}$. Existuje teda celkovo 16 možných logických spojok. (Inak: $2^4 = 16$ spôsobov ako vyplniť tabuľku so 4 riadkami.) Okrem spojok $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, ktoré sme zvyknutí používať, dostaneme aj niektoré menej obvyklé; napríklad spojku, ktorá bez ohľadu na hodnoty p a q má vždy hodnotu 1.

Všetky možné logické spojky môžeme dostať pomocou $\neg$, $\wedge$ a $\vee$. Ak napríklad chceme dostať spojku s tabuľkou

p	q	$p * q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

tak to môžeme dosiahnuť takto: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Inak povedané, použili sme disjunkciu formúl z ktorých každá je pravdivá pre jediný riadok v tabuľke; a pridali sme tie formuly v ktorých chceme, aby v tabuľke bola jednotka. Rovnaký postup by sme vedeli použiť aj keby sme mali viac premenných. (Jediný prípad, kedy to nefunguje, je spojka, ktorá je vždy rovná 0 – museli by sme použiť disjunkciu 0 formúl. Tú ale vieme dostať napríklad ako $p \wedge \neg p$.)

Riešenie: Najprv sa presvedčíme, že pomocou NAND a NOR vieme dostať všetky logické spojky. Stačí nám ukázať, že vieme dostať $\neg$, $\wedge$ a $\vee$.

Ľahko vidíme, že $\neg p \Leftrightarrow p \,\mathrm{NAND}\, p \Leftrightarrow p \,\mathrm{NOR}\, p$. Čiže vieme z ktorejkoľvek z týchto dvoch spojok dostať negáciu.

V prípade spojky NAND potom ďalej vieme dostať $p \wedge q = \neg(p \,\mathrm{NAND}\, q)$ a aj $p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$. (Tieto zápisy skutočne vieme rozpísať iba s použitím NAND: Konkrétne máme $p \wedge q = (p \,\mathrm{NAND}\, q) \,\mathrm{NAND} (p \,\mathrm{NAND}\, q)$ a $p \vee q = [(p \,\mathrm{NAND}\, q) \,\mathrm{NAND} (p \,\mathrm{NAND}\, q)] \,\mathrm{NAND} [(p \,\mathrm{NAND}\, q) \,\mathrm{NAND} (p \,\mathrm{NAND}\, q)]$.)

Podobne, z NOR postupne dostaneme $p \vee q = \neg(p \,\mathrm{NOR}\, q)$ a $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$.

Teraz ešte chceme zdôvodniť, že pomocou žiadnej inej spojky sa už nedajú dostať všetky logické spojky. Vylúčime najprv niektoré spojky. Ak má spojka $*$ v riadku $(1, 1)$ hodnotu 1, t.j. jej tabuľka je takáto

p	q	$p * q$
1	1	1
1	0	?
0	1	?
0	0	?

tak akýkoľvek výraz tvaru $p_1 * p_2 * \cdots * p_n$, pri ľubovoľnom uzátvorkovaní a nahradení $p_1, \ldots, p_n$ premennými p a q bude mať pre $p = q = 1$ hodnotu 1. Teda nemôžeme nijako dostať napríklad $p \,\mathrm{NAND}\, q$.

Podobnou úvahou vieme vylúčiť možnosť

p	q	$p * q$
1	1	?
1	0	?
0	1	?
0	0	0

Dostali by sme totiž pre $p = q = 0$ vždy hodnotu 0.

Zatiaľ sme teda zistili, že tabuľka musí vyzerať nejako takto:

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	?
0	1	?
0	0	1

Zostávajú teda celkovo 4 možnosti:

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Prvá a štvrtá tabuľka predstavujú spojky NAND a NOR, pre ktoré sme v prvej časti riešenia overili, že majú požadovanú vlastnosť. Všimnime si druhú a tretiu tabuľku. V druhej je vlastne operácia $p * q = \neg q$ a v tretej $p * q = \neg p$.

Vidíme teda, že tieto dve možnosti sú také, že závisia iba od jednej premennej. Takto určite nemôžeme dostať všetky možnosti. Napríklad ak uvažujeme o tretej tabuľke, t.j. o funkcii $p * q = \neg p$, tak výraz $p_1 * p_2 * \cdots * p_n$ môže byť (v závislosti od uzátvorkovania) rovný p_1 alebo $\neg p_1$. Ak za všetky premenné dosadíme buď p alebo q, tak vieme dostať iba 4 funkcie: p, $\neg p$, q, $\neg q$.

To isté platí aj o druhej tabuľke. $\square$