2-UMA-115 Teória množín

Martin Sleziak

23. septembra 2010

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Verzia: 23. septembra 2010

1.1 Predhovor

Zjednodušene sa dá povedať, že teória množín je vlastne disciplína, ktorá sa zaoberá prácou s nekonečnými množinami. Jej vznik si vyžiadal istý filozofický posun v chápaní nekonečna. V matematike sa dosť dlho pracovalo s nekonečne malými a nekonečne veľkými veličinami tak, že vlastne išlo o limitné procesy, v ktorých sa tieto veličiny postupne mohli dostatočne zmenšovať či rásť. Pohľad teórie množín je v ostrom kontraste s týmto prístupom, keďže v nej sa pracuje s nekonečnými množinami ako už s hotovými objektmi, ktorých proces vytvárania už je ukončený.

Za počiatky teórie množín môžeme pokladať práce nemeckého matematika Georga Cantora. Okolo roku 1870 pracoval na problémoch súvisiacich s teóriou trigonometrických radov a v súvislosti s nimi použil pojem derivácie množiny A' (=množina hromadných bodov množiny A). Pracoval tu s iteráciami tohoto pojmu – $A', A'', \dots, A^{(n)}$ (prvá, druhá, n-tá derivácia). Keď sa mu podarilo nájsť množinu, pre ktorú sa všetky konečné iterácie $A^{(n)}$ líšili, bolo prirodzené definovať ďalšiu iteráciu $A^{(\infty)}$ a potom pokračovať s ďalšími iteráciami ako $A^{(\infty+1)}$. Tieto úvahy boli jedným zo zdrojov, ktoré ho viedli k zavedeniu *transfinitných čísel,* ktoré dnes poznáme ako ordinálne a kardinálne čísla.

Už fakt, že pri zrode teórie množín stáli Cantorove výskumy v matematickej analýze naznačuje, že táto oblasť má veľký význam pre ostatné matematické disciplíny. Potvrdzuje sa to dodnes, postupne matematici našli mnohé aplikácie výsledkov a techník z teórie množín v takmer všetkých matematických disciplínach.

Dôležitosť teórie množín je aj v tom, že poskytuje rôznym matematickým disciplínam spoločný jazyk – (takmer) celá dnešná matematika je sformulovateľná v jazyku teórie množín.

Tento text je zamýšľaný ako učebný text k predmetu Teória množín pre učiteľské zamerania na FMFI. Obsahuje určite aj časti, ktoré na prednáške nestihneme prebrať, môžu byť však pre vás zaujímavé (prípadne niektoré z týchto rozširujúcich častí by mohli byť zaujímavé aj pre študentov odboru matematika či iných odborov). Rozširujúce časti sú vyznačené menším fontom alebo hviezdičkou pri názve príslušnej časti. Text prednášky budem priebežne dopĺňať a opravovať, aktuálna verzia bude dostupná na `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/`.

V texte nájdete množstvo vyriešených úloh. Určite nezaškodí, ak sa ich pokúsite riešiť samostatne – len samostatným uvažovaním si môžete skutočne dôkladne osvojiť niektorú matematickú disciplínu. Som presvedčený o tom, že v rámci tejto prednášky sa nájde veľa zaujímavých poznatkov. Ako ste však isto spoznali aj z iných predmetov, matematika môže byť zaujímavá a zábavná, vyžaduje si to však najprv nemalé úsilie na strane študenta.

1.2 Sylaby a literatúra

1.2.1 Literatúra

Pri príprave týchto poznámok som čerpal najmä z kníh [BŠ, D, ŠS]. V častiach o histórii teórie množín som čerpal hlavne z [BŠ, GG, Z2]. Samozrejme, pomohli mi aj rôzne internetové zdroje ako napríklad [WIK], blogy rôznych matematikov, s niektorým úlohami, ktoré uvádzam ako cvičenia, som sa stretol na rôznych matematických diskusných fórach.

Kniha [ŠS] je veľmi zrozumiteľne písaná a je určená pre študentov učiteľských odborov. Kniha [BŠ] je náročnejšia a obsahuje aj veľmi pokročilé časti, ktoré výrazne presahujú obsah tohoto kurzu. Prvé dve jej kapitoly zhruba zodpovedajú tomu, čo budeme preberať.[1] Z ďalších textov dostupných v slovenčine alebo češtine spomeňme ešte [B3]. Pokiaľ ste schopní čítať text v angličtine, ľahko nájdete veľké množstvo ďalších výborných textov o teórii množín.

1.2.2 Sylaby predmetu

Zermelov-Fraenkelov axiomatický system teórie množín. Kardinálne čísla a kardinálna aritmetika. Konečné a nekonečné množiny. Množina prirodzených čísel a matematická indukcia. Spočítateľné a nespočítateľné množiny. Mohutnosť kontinua a kardinalita množín vyskytujúcich sa v školskej matematike.

1.2.3 Štátnicové otázky

Štátnicové otázky z predmetu matematika, ktoré by ste sa mali naučiť na tomto predmet sú:

1. Axiomatická metóda v teórii množín, Zermelov-Fraenkelov axiomatický systém teórie množín.
2. Konečné a nekonečné množiny, vlastnosti konečných množín.
3. Spočítateľné množiny, vlastnosti spočítateľných množín, existencia nespočítateľnej množiny.
4. Model Peanovej aritmetiky celých nezáporných čísel v teórii množín.
5. Kardinálne čísla. Súčet a súčin kardinálnych čísel, vlastnosti súčtu a súčinu kardinálnych čísel.

Krátky komentár si zaslúži štvrtá otázka týkajúca sa konštrukcie prirodzených čísel v rámci axiomatickej teórii množín. Prístup, ktorý som zvolil v tomto texte, je taký, že najprv zadefinujeme ordinálne čísla a prirodzené čísla potom chápeme ako konečné ordinálne čísla. Urobil som tak z toho dôvodu, že ordinálne čísla sú zaujímavé a užitočné a mnohé z prostriedkov potrebných na formálnu definíciu prirodzených čísel sa dajú využiť aj pri definícii ordinálnych čísel. Napríklad v texte [Č2] môžete nájsť priamočiarejší prístup, pri ktorom sa priamo konštruujú prirodzené čísla, pričom o ordináloch tam nepadne ani zmienka.

V časti 6.4.4 sa dotkneme aj otázky: „Konštrukcia oboru (usporiadaného okruhu) celých čísel z oboru celých nezáporných čísel a oboru (usporiadaného pola) racionálnych čísel z oboru celých čísel.“ Nebudeme sa však ňou zaoberať podrobne.

[1] Jeden exemplár [BŠ] sa kedysi nachádzal aj v knižnici na átriových domkoch – ak tá knižnica ešte funguje, možno ju tam zoženiete. Obe knihy by však mali byť u nás pomerne dostupné. Ak by ste však mali záujem prečítať si akúkoľvek literatúru, ktorú v tomto texte citujem a nepodarilo by sa vám ju zohnať, pokojne sa obráťte na mňa.

1.3 Niečo z histórie

No one shall expel us from the Paradise that Cantor has created.
(*Nikto nás nevyženie z raja stvoreného Cantorom.*)
David Hilbert

V tejto prednáške sa budeme zaoberať axiomatickou teóriou množín. Na úvod by bolo azda vhodné povedať aspoň stručne niečo o tom ako a prečo vznikla. Pokiaľ sa chcete dozvedieť viac, ako veľmi pekný (a súčasne stručný) text o histórii modernej teórie množín by som vám odporučil [BŠ, s.11-s.25]. (Túto úvodnú kapitolu nazvali autori spomínanej knihy „Romance matematické analýzy a teorie množin".)

Za zakladateľa teórie množín je všeobecne považovaný *Georg Cantor* (hoci niektoré idey možno nájsť napríklad aj v dielach *Bernarda Bolzana*). Za základnú tézu teórie množín môžeme prehlásiť možnosť uchopiť viacero objektov ako jediný objekt (ich množinu).[2] Matematikov na celom svete veľmi prekvapil Cantorov dôkaz, že existuje nekonečne veľa transcendentných reálnych čísel, uverejnený v roku 1874. Originálna bola najmä metóda dôkazu – Cantor dokázal tento výsledok bez toho, aby nejaké takéto číslo skonštruoval. Tento dôkaz si v rámci tejto prednášky aj ukážeme. Sami budete mať možnosť vidieť, že po vybudovaní potrebného aparátu je už tento dôkaz veľmi jednoduchý – na rozdiel od konštruktívneho dôkazu existencie transcendentných čísel pochádzajúceho od Josepha Liouvillea.

Teória množín sa u mnohých matematikov stretla s výrazným odporom. Dôvody boli rôzne, jedným z nich bol aj nekonštruktívny charakter viacerých dôkazov – ako napríklad v prípade existencie transcendentných čísel. Tento odpor ešte zosilnel po objavení viacerých paradoxov (sporov) v teórii množín, o ktorých budeme hovoriť o chvíľu.

V Cantorových prácach sa objavilo mnoho dôležitých výsledkov z teórie množín – dá sa povedať, že väčšina z tých, s ktorými sa v rámci tejto prednášky stretneme. Stále však nešlo o axiomatickú teóriu množín. Cantorov prístup, pri ktorom bol pojem množiny chápaný intuitívne a pomerne voľne, sa zvykne nazývať *naivná teória množín.* Na mnohé účely je tento prístup úplne postačujúci, v podstate je to presne ten prístup, ktorý ste používali na prednáškach z matematiky, ktoré ste doteraz absolvovali. Začiatkom 20-teho storočia sa však zistilo, že naivný prístup k množinám môže viesť k viacerým paradoxom.

Ako ilustráciu stručne popíšme *Russellov paradox.* (Neskôr sa budeme paradoxami teórie množín zaoberať o niečo podrobnejšie.) Povedali sme si, že základná ide teórie množín je chápať viac objektov ako prvky jedného celku – jednej množiny. Takto môžeme zaviesť množinu všetkých množín, ktorú označíme **Set**. Z tejto množiny môžeme vymedzovať podmnožiny pomocou rôznych vlastností prvkov. Uvažujme vlastnosť $x \notin x$, t.j. množina nie je prvkom samej seba. Táto vlastnosť určí podmnožinu $A = \{x \in \mathbf{Set}; x \notin x\}$. Má aj množina A takúto vlastnosť?

Ak ju má, čiže ak $A \notin A$, tak podľa definície množiny A má platiť $A \in A$, čo je spor.

Obrátene, ak túto vlastnosť nemá, tak $A \in A$. Ale do množiny A patria len množiny s uvedenou vlastnosťou. To znamená, že $A \notin A$ a opäť dostávame spor.

Pokiaľ nechceme teóriu množín zavrhnúť úplne, mali by sme sa pokúsiť nejako takýmto problémom predísť. Významný pokus týmto smerom urobili Alfred North Whitehead a Bertrand Russell vo svojom diele Principia Mathematica. Paradoxom sa snažili predísť tým, že vybudovali rozsiahlu teóriu typov. Množiny istého typu mohli byť len prvkami množín vyššieho typu, čím sa predišlo možným cyklom a tak aj Russelovmu paradoxu. Nevýhodou systému typov bola veľká zložitosť – do istej miery je tento fakt ilustrovaný tým, že výsledok

[2] Takto napísané to znie asi pomerne naivne – ale asi nie je reálne očakávať, že sa podarí vystihnúť podstatu celej teórie v jedinej vete. Treba dúfať, že jej podstatu pochopíte po tomto jednosemestrovom kurze.

$1 + 1 = 2$ sa nachádza na strane 379 [WR, p.379,*54.43].[3]

Oveľa viac sa presadil axiomatický prístup, pri ktorom sa teória množín buduje z dvoch primitívnych (=nedefinovaných) pojmov *množina* a *byť prvkom množiny* pomocou axióm, ktoré popisujú správanie týchto prvkov. Takýto axiomatický systém začal budovať nemecký matematik Ernst Zermelo, po ňom je pomenovaný v súčasnosti najrozšírenejší Zermelov-Fraenkelov axiomatický systém (označovaný ako ZF resp. ZFC – po pridaní axiómy výberu).

S použitím axiomatického systému sa podarilo odstrániť všetky dovtedy známe paradoxy. Samozrejme, stále vo vzduchu visela otázka, či sa neobjavia nejaké nové spory v rámci axiomatickej teórie množín. Táto otázka bola jednou z pohnútok, ktoré viedli k tzv. *Hilbertovmu programu.* Jeho ciele boli veľmi ambiciózne, tu spomeňme len dva z nich: Jedným z cieľov bolo sformalizovať celú matematiku v rámci teórie množín. Druhým cieľom bolo ukázať bezospornosť teórie množín, a tým pádom vlastne aj celej matematiky (alebo aspoň tej časti, ktorú budeme schopní v rámci teórie množín sformulovať). Viac o Hilbertovom programe sa môžete dozvedieť napríklad v [Z2, Kapitola 10].

Dnes už vieme, že Hilbertov program sa nedá naplniť v pôvodnom rozsahu. Z výsledkov rakúskeho matematika Kurta Gödla vyplýva, že bezospornosť systému ZFC sa nedá dokázať v tomto systéme. Hilbertov program i tak výrazne ovplyvnil podobu súčasnej matematiky, ktorá je skutočne vybudovaná na teórii množín. Možno nie je až také neopodstatnené očakávať, že za približne storočie intenzívnej práce v tomto axiomatickom systéme (ak teda prijmeme tézu, že drvivá väčšina súčasnej matematiky je sformalizovateľná v ZFC) sa spor v základoch matematiky neobjavil, takže tam snáď žiadny spor nebude. Úplnú istotu však mať nemôžeme.

Viac o Gödelových vetách (ako aj o niektorých filozofických otázkach súvisiacich s teóriou množín) sa môžete dozvedieť v [Z2]. Tento text je pomerne náročný, rozhodne je vhodné mať zvládnuté základy teórie množín prv, než ho začnete čítať.

Poznamenajme, že smery načrtnuté v práve uvedenom stručnom historickom prehľade do istej miery aj naznačujú akým smerom sa bude uberať náš kurz o základoch teórie množín. Na jednej strane zavedieme axiómy systému ZFC a ukážeme si, ako v ňom možno vybudovať napríklad obor prirodzených čísel (a naznačíme konštrukciu ďalších číselných oborov). Ako sme už však spomenuli, na mnohé účely stačí „naivný“, t.j. neaxiomatický prístup k teórii množín. Ani my »väčša nebudeme dôkazy rozpitvávať až po najnižšiu logickú úroveň, t.j. až z axióm, čo znamená, že mnohé časti uvedené v tomto texte by sa dali zvládnuť aj bez znalosti axiomatického systému, len s použitím naivnej téorie množín.

1.4 Základné označenia

Budeme používať štandardné označenia:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ je množina prirodzených čísel (čiže na tejto prednáške považujeme aj nulu za prirodzené číslo)
$\mathbb{Z}$ = celé čísla
$\mathbb{Q}$ = racionálne čísla
$\mathbb{R}$ = reálne čísla
$\mathbb{C}$ = komplexné čísla

Poznámka 1.4.1. V rôznych aplikáciách a príkladoch (kontrapríkladoch) budeme bežne pracovať s množinou prirodzených čísel $\mathbb{N}$, množinou reálnych čísel $\mathbb{R}$ a ďalšími spoemnutými {prelim:POZNMNOZN}

[3] Ako však budeme vidieť, aj vybudovanie prirodzených čísel v teórii ZFC bude pomerne zdĺhavé a náročné, takže tento fakt nie je spôsobený len zložitosťou zvoleného systému, ale aj tým, že sa snažíme prirodzené čísla vybudovať z veľmi obmedzeného systému základných pojmov a axióm.

číselnými obormi, ktoré poznáte z nižších ročníkov. Až neskôr si ukážeme, že všetky tieto číselné obory možno vybudovať v rámci teórie množín – takže ich skutočne môžeme považovať za množiny v systéme ZFC.

Kapitola 2

Axiomatický prístup k teórii množín

2.1 Logika prvého rádu

Ešte predtým, než sa začneme zaoberať množinami ako takými, povieme si niečo o logike prvého rádu, ktorá sa zaoberá výrokmi vytvorenými pomocou logických spojok a kvantifikátorov.

Logikou prvého rádu sa nebudeme zaoberať detailne, zjednodušene povedané, je to súhrn pravidiel pre prácu s výrokmi, ktoré sú v súlade s tým ako obvykle uvažujeme. Ak by ste sa chceli o prvorádovej logike dozvedieť viac, môžete si o nej prečítať v knihách a textoch venovaných čisto tejto problematike, ako napríklad [B1, E, So, Š].

2.1.1 Výroková logika

Pripomenieme si niektoré pravidlá na overovanie pravdivosti výrokov, ktoré už poznáte z nižších ročníkov. Za výrok môžeme považovať akékoľvek tvrdenie, ktoré môže byť pravdivé alebo nepravdivé. (Presná definícia výroku pre nás nie je až taká dôležitá – v skutočnosti jediné výroky, s ktorými budeme na tejto prednáške pracovať, sú formuly jazyka teórie množín, ktoré zadefinujeme v podkapitole 2.3.1.)

Definícia 2.1.1. *Negáciou* výroku p rozumieme výrok „neplatí p“. Označujeme ju $\neg p$.
Pre dva výroky p a q nazývame ich *konjunkciou* výrok „p a q“, označujeme $p \wedge q$.
Disjunkcia je výrok „p alebo q“, označujeme $p \vee q$.
Pod *implikáciou* rozumieme výrok „ak platí p, tak platí q“, označujeme $p \Rightarrow q$.
Ekvivalencia výrokov p a q je výrok „p platí práve vtedy, keď platí q“, označujeme $p \Leftrightarrow q$.

Tieto definície logických spojok sú zhrnuté v nasledujúcich pravdivostných tabuľkách.[1]

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

[1] Na označovanie pravdivosti a nepravdivosti budeme v tabuľke používať symboly 1 a 0. Niekedy sa zvyknú používať aj T a F, ako skratky pre anglické true a false.

Definícia 2.1.2. *Tautológiou* nazývame taký výrok, zložený z výrokových premenných a logických spojok, ktorý je vždy pravdivý, bez ohľadu na pravdivosť výrokových premenných, ktoré v ňom vystupujú.

Tautológie môžeme overovať jednoducho tabuľkovou metódou, ktorú poznáte z nižších ročníkov a pravdepodobne i zo strednej školy.

Príklad 2.1.3. Overme napríklad tautológiu $p \vee (\neg p)$ (princíp vylúčenia tretieho).

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Ako ďalší príklad si ukážeme overenie jedného z de Morganových pravidiel.

{logika:PRDEMORGAN}

Príklad 2.1.4. *De Morganove pravidlá* sú pravidlá ako negovať konjunkciu a disjunkciu.

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

Samozrejme, pretože teraz vo výroku vystupuje viacero premenných, budeme potrebovať viac riadkov tabuľky na to, aby sme vyčerpali všetky možnosti.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1

Niekedy si môžeme pri overovaní platnosti tautológie použiť aj jednoduchší postup. V predchádzajúcom príklade sme napríklad mohli na základe symetrie overovať o jeden riadok menej. Inú možnosť zjednodušenia ilustruje nasledujúci príklad.

{logika:PRTAUTNEPR}

Príklad 2.1.5. Dokážeme tautológiu $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$. (Táto tautológia súvisí s princípom nepriameho dôkazu. Implikácia $\neg q \Rightarrow \neg p$ sa zvykne nazývať *obmena implikácie* $p \Rightarrow q$.)

Aby sme dokázali ekvivalenciu dvoch výrokov, stačí ukázať, že výrok na ľavej strane je nepravdivý práve v tých prípadoch, kedy je nepravdivý výrok na pravej strane.

Implikácia je nepravdivá jedine v prípade, že ľavý výrok je pravdivý a pravý je nepravdivý (prípad $1 \Rightarrow 0$). Teda výrok $p \Rightarrow q$ je nepravdivý práve vtedy, keď $p = 1$ a $q = 0$. Podobne, aby bol výrok $\neg q \Rightarrow \neg p$ nepravdivý, musí byť $\neg q = 1$ a $\neg p = 0$, čo je presne ten istý prípad $p = 1$ a $q = 0$. Vidíme, že obe strany ekvivalencie majú vždy tú istú pravdivostnú hodnotu.

(Tento spôsob overenia tautológie sa až tak veľmi nelíši od tabuľkovej metódy – vlastne sme si len rozmysleli, v ktorých riadkoch tabuľky sa na oboch stranách uvedenej ekvivalencie vyskytne 0 – zdá sa mi byť bližší ku spôsobu, ako prirodzene uvažujeme o výrokoch.)

V cvičení 2.1.1 nájdete viacero tautológií. Je dobré si uvedomiť ako súvisia tautológie s niektorými typmi dôkazov. Tautológia z príkladu 2.1.5 je presne princíp nepriameho dôkazu, ktorý sme už spomínali. Tautológia z cvičenia 2.1.1b) sa tiež často používa pri dokazovaní – namiesto výroku tvaru $p \Leftrightarrow q$ dokážeme zvlášť jednotlivé implikácie $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$.

2.1.2 Výroky s kvantifikátormi

Okrem logických spojok, ďalším nástrojom pomocou ktorého môžeme vytvárať zložitejšie tvrdenia z jednoduchších, sú *kvantifikátory.* V nasledujúcej definícii $P(x)$ označuje *výrokovú funkciu,* čím rozumieme to, že po dosadení akéhokoľvek objektu za x dostaneme výrok.

Definícia 2.1.6. Výrok $(\forall x)P(x)$ znamená, že pre každý objekt x platí výrok $P(x)$. Symbol $\forall$ nazývame *všeobecný kvantifikátor.*

Výrok $(\exists x)P(x)$ znamená, že existuje taký objekt x, pre ktorý platí výrok $P(x)$. Symbol $\exists$ nazývame *existenčný kvantifikátor.*

Opäť, podobne ako pri výroku, je táto definícia pomerne nepresná – nie je jasné, čo sa skrýva za slovom „objekt". Túto nepresnosť odstránime v časti 2.3.1. Zatiaľ si môžete predstaviť, že hovoríme o objektoch z akéhosi vopred daného systému (univerza), čiže výrok $(\forall x)P(x)$ znamená, že $P(x)$ platí pre každé x z tohoto univerza. (Univerzom pre nás neskôr bude systém všetkých množín – k axiomatickej definícii množín sa dostaneme až neskôr.)

V praxi obvykle i tak budeme chcieť hovoriť nie o všetkých objektoch, ale objektoch z nejakej konkrétnej množiny A. Budeme preto používať nasledujúce zápisy[2]

$$(\forall x \in A)P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x))$$
$$(\exists x \in A)P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists x)(x \in A \wedge P(x))$$

Čiže $(\forall x \in A)P(x)$ je len skrátený zápis toho, že existuje x, ktoré súčasne patrí do množiny A a spĺňa výrok $P(x)$.

Na overovanie platnosti tvrdení s kvantifikátormi už nemáme k dispozícii jednoduchú metódu, podobnú vyplneniu tabuľky pravdivostných hodnôt. Je možné zaviesť niekoľko pravidiel (axióm), z ktorých sa dajú ostatné tvrdenia odvodzovať. Napríklad pomerne prirodzené sa zdajú byť tieto pravidlá:

Ak platí výrok $(\forall x)P(x)$, tak platí aj výrok $P(a)$ pre daný konkrétny objekt a. (Symbol $P(a)$ označuje výrok, ktorý dostaneme dosadením a namiesto x. Presnejšie povedané, namiesto každého voľného výskytu x – o voľných a viazaných premenných vo výrokoch s kvantifikátormi budeme hovoriť o chvíľu.)

Ak platí $(\exists x)P(x)$ a súčasne platí $P(a) \Rightarrow Q$ (kde a označuje nejaký konkrétny objekt a Q je nejaký výrok), tak platí aj Q.

V tejto prednáške nebudeme vymenovávať všetky používané pravidlá a ukazovať si dôkazy tvrdení pomocou týchto pravidiel – ak by vás táto problematika zaujala, opäť sa môžete obrátiť na prednášky a texty venované špeciálne logike. Pokiaľ budeme chcieť overiť a pravdivosť nejakého výroku s kvantifikátormi, budeme sa držať zdravého rozumu – budeme postupovať tak, ako by sme o týchto výrokoch uvažovali v obvyklom jazyku a v každodenných situáciach. (Je pravda, že v každodenných situáciach neuvažujeme o množinách, pokojne si však môžeme pomôcť tým, že pod výrokom $(\forall x)P(x)$ si namiesto „každá množina má vlastnosť $P(x)$" na chvíľu predstavíme napríklad výrok „každá gulôčka v tomto vrecku je modrá", podobne pod $(\exists x)P(x)$ si môžeme predstaviť výrok „niektorá gulôčka v tomto vrecku je modrá".)

{logika:PRNEGFORALL}

Príklad 2.1.7 (Negácia výrokov s kvantifikátormi). Zdôvodníme platnosť výroku

$$\neg[(\forall x)P(x)] \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x).$$

Ľavá strana uvedenej ekvivalencie znamená, že nie všetky objekty, s ktorými pracujeme majú vlastnosť $P(x)$. To je ale presne to isté, že medzi nimi existuje aspoň jeden objekt, ktorý

[2] Tu používame symbol $\in$, pričom $x \in A$ označuje, že x je prvkom množiny A. Významom tohoto symbolu sa budeme zaoberať neskôr, zatiaľ si jednoducho môžete predstaviť, že naše univerzum je v tomto prípade A.

túto vlastnosť nemá, a teda spĺňa $\neg P(x)$. (Ak nie je pravda, že všetky gulôčky v našom vrecku sú modré, musí byť medzi nimi aspoň jedna inej farby.)

Podobným spôsobom si môžeme ozrejmiť, že platí ekvivalencia

$$\neg[(\exists x)P(x)] \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x).$$

(Túto ekvivalenciu môžeme odvodiť z predchádzajúcej aj jednoducho znegovaním oboch strán v predchádzajúcej ekvivalencii – pozri úlohu 2.1.1e).)

Obidve tieto ekvivalencie často používame, ak potrebujeme znegovať výrok obsahujúci kvantifikátor. Stručne sa dajú zhrnúť tak, že zmeníme kvantifikátor a výrok pod ním znegujeme.

Príklad 2.1.8. Pokúsme sa znegovať výrok

$$R(x) := (\forall x)[P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y)].$$

Postupne dostaneme

$$\begin{aligned}\neg R(x) \Leftrightarrow &(\exists x)\neg[P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y)] \Leftrightarrow\\ &(\exists x)[P(x) \wedge \neg(\exists y)Q(x,y)] \Leftrightarrow\\ &(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)\neg Q(x,y)]\end{aligned}$$

Okrem pravidiel na negovanie výrokov s kvantifikátormi sme použili negáciu implikácie – pozri príklad 2.1.1f).

Príklad 2.1.9. Skúsme nejaký praktickejší príklad. Najprv sa pokúsme pomocou kvantifikátorov zapísať, že postupnosť reálnych čísel $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje. To znamená, že existuje reálne číslo, ktoré je limitou tejto postupnosti:

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon].$$

Podľa pravidiel, ktoré sme uviedli, je negácia tohoto výroku

$$(\forall L \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})[n > n_0 \wedge |x_n - L| \geq \varepsilon].$$

V matematickej analýze ste možno niekedy použili overenie tohoto výroku na dôkaz toho, že postupnosť nekonverguje.

V skutočnosti sme tak trochu podvádzali – namiesto $(\exists L \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon)\dots$ by sme mali podľa našej dohody písať $(\exists L)[L \in \mathbb{R} \wedge \{(\forall \varepsilon)\dots\}]$. (Podobne ako sme to urobili v poslednej časti tvrdenia, ktorú sme mohli zapísať v tvare $(\forall n > n_0)|x_n - L| < \varepsilon$.) Môžete si skúsiť rozmyslieť, že aj keby sme uvedené výroky podrobnejšie rozpísali takýmto spôsobom, ako negáciu by sme dostali to isté. Čiže pravidlá na negovanie výrokov s kvantifikátormi fungujú aj ak premenné vyberáme len z určitej množiny.

Po odbočke venovanej negáciam výrokov s kvantifikátormi sa ešte na chvíľu vráťme k overovaniu pravdivosti takýchto výrokov. V príklade 2.1.7 sme pre daný výrok overili, že je pravdivý. Ukážme si aspoň jeden príklad, kde zdôvodníme, že nejaký výrok obsahujúci kvantifikátory nepravdivý. (V cvičeniach k tejto podkapitole nájdete ďalšie výroky, o ktorých máte rozhodnúť, či sú pravdivé alebo nie a svoje tvrdenie zdôvodniť.)

Príklad 2.1.10. Chceme overiť, či výrok

$$[(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))]$$

je pravdivý alebo nie. Po chvíli uvažovania prídeme na to, že tento výrok asi neplatí. Radi by sme to zdôvodnili tak, že nájdeme konkrétny príklad výrokov, $P(x)$ a $Q(x)$ pre ktoré to neplatí.

Skúsme uvažovať napríklad výroky o reálnych číslach:
$P(x) := (x > 2)$
$Q(x) := (x > 3)$.
(Pokiaľ chceme zdôrazniť, že ide o reálne čísla, môžeme písať $P(x) := (x \in \mathbb{R}) \wedge (x > 2)$ a $Q(x) := (x \in \mathbb{R}) \wedge (x > 3)$. Už sme však uviedli, že sa zaoberáme reálnymi číslami, takže aj keď to explicitne nenapíšeme, všetky výskyty kvantifikátorov chápeme tak, že sa vzťahujú na reálne čísla.)

Pozrime sa najprv na ľavú stranu implikácie, ktorej neplatnosť chceme ukázať, t.j. na výrok $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$. Tento výrok platí, lebo ľavá strana implikácie, t.j. $(\forall x)(x > 2)$, je nepravdivá. (Tvrdenie $x > 2$ neplatí pre všetky reálne čísla.)

Teraz sa pozrime na výrok $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$, t.j. $(\forall x)(x > 2 \Rightarrow x > 3)$. Tento výrok je nepravdivý. Implikácia $(x > 2 \Rightarrow x > 3)$ neplatí napríklad pre $x = \frac{5}{2}$.

Čiže výrok, o ktorého pravdivosti chceme rozhodnúť, je ekvivalentný si implikáciou $1 \Rightarrow 0$, a teda je nepravdivý.

Viazaný a voľný výskyt premennej O *viazanom výskyte* premennej vo výroku hovoríme v prípade, že sa vyskytuje v kvantifikátore, výskyt bez kvantifikátora nazývame *voľný*. Ukážme si to na jednoduchých príkladoch:
$(\forall x \in \mathbb{R})x^2 \geq 0$ – v tomto výroku je x viazaná premenná,
$x^2 \geq 0$ – tu je x voľnou premennou,
$x = 2 \wedge (\forall x \in \mathbb{R})x^2 \geq 0$ – v tomto výroku sa premenná x vyskytuje dvakrát, prvý výskyt je voľný a druhý viazaný. Znamená to, že prvé x „nie je to isté“ x ako druhé. Preto je výhodnejšie (zrozumiteľnejšie) tento výrok nahradiť ekvivalentným výrokom $x = 2 \wedge (\forall y \in \mathbb{R})y^2 \geq 0$.

Cvičenia

{logika:CVTAUT}

Úloha 2.1.1. Dokážte, že nasledujúce výroky sú tautológie:
a) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
c) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
d) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
e) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$
f) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
g) $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$
h) $((p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p)$
i) $[p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$

{logika:CVTAUT2}

Úloha 2.1.2. Dokážte, že nasledujúce výroky sú tautológie:
a) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$;
b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$;
c) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$;
d) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$;
e) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$;
f) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$;
g) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$;
h) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$;
i) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$;
j) $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$.

Úloha 2.1.3. Zistite, či uvedené výroky sú tautológie. Svoje tvrdenie zdôvodnite (ak ide o tautológiu, tak to dokážte; ak nie, uveďte kontrapríklad).
a) $p \Leftrightarrow \neg\neg p$;
b) $\neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg p)$;
c) $(p \wedge q) \Rightarrow p$;
d) $p \Rightarrow \neg p$;
e) $(p \vee q) \Rightarrow p$;
f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$;
g) $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$;
h) $\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$;
i) $[p \Rightarrow (r \vee \neg q)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
j) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

{logika:CVREDUND}

Úloha 2.1.4. Ukážte, že operácie $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ môžeme definovať pomocou:
a) negácie a konjunkcie,
b) negácie a disjunkcie,
c) negácie a implikácie,
d) logickej spojky NAND definovanej ako $P \,\mathrm{NAND}\, Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$,
e) logickej spojky NOR definovanej ako $P \,\mathrm{NAND}\, Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$.

Úloha 2.1.5. Rozhodnite, či sú uvedené výroky pravdivé. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
a) $[(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$
b) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)]$
c) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)]$
d) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)]$
e) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)]$
f) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists x)Q(x)]$
g) $[(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x))] \Rightarrow (\forall x)\neg R(x,x)$

Úloha 2.1.6. Pre výrokovú funkciu $P(x,y)$ uvažujme výroky $P_1(x,y) = (\forall x)(\forall y)P(x,y)$, $P_2 = (\forall x)(\exists y)P(x,y)$, $P_3 = (\exists x)(\forall y)P(x,y)$, $P_4 = (\exists x)(\exists y)P(x,y)$, $P_5 = (\forall y)(\forall x)P(x,y)$, $P_5 = (\forall y)(\exists x)P(x,y)$, $P_6 = (\forall y)(\exists x)P(x,y)$, $P_7 = (\exists y)(\forall x)P(x,y)$, $P_8 = (\exists y)(\exists x)P(x,y)$.
a) Ukážte, že pre tieto výroky platí: $P_1 \Leftrightarrow P_5$, $P_4 \Leftrightarrow P_8$ a

$$\begin{tikzcd}
& P_3 \arrow[r, Rightarrow] & P_6 \arrow[dr, Rightarrow] & \\
P_1 \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & P_4 \\
& P_7 \arrow[r, Rightarrow] & P_2 \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

b) Ukážte na príklade, že implikácie v predchádzajúcom diagrame nemožno nahradiť ekvivalenciami.
c) Ukážte na príklade, že nemusia platiť ekvialencie $P_3 \Rightarrow P_2$ a $P_7 \Rightarrow P_6$.
Toto cvičenia sa dá stručne zhrnúť tak, že všetky vzťahy medzi výrokmi $P_2, \ldots, P_7$ sú tie, ktoré sú naznačené v uvedenom diagrame.

{logikacvic:ULODISTRIB}

Úloha 2.1.7. Nech p je výrok a $Q(x)$ je výroková funkcia. Overte, či platia ekvivalencie:
a) $p \wedge (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(p \wedge Q(x))$;

b) $p \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(p \vee Q(x))$;
c) $p \wedge (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(p \wedge Q(x))$;
d) $p \vee (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(p \vee Q(x))$.

Úloha 2.1.8. Znegujte nasledujúce výroky. Sú tieto výroky (alebo ich negácie) pravdivé, ak výrokové premenné berieme z $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (s obvyklým sčitovaním, násobením, usporiadaním)?
a) $(\forall x, y)(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$;
b) $(\forall x)(\exists y)(x^2 = y)$;
c) $(\forall x)(\exists y)(x^3 = y)$;
d) $(\forall x, y)(\exists z)(x + y = z)$;
e) $(\exists x)x^2 \neq 0$;
f) $(\forall x)x^2 < 0$;
g) $(\forall x)x^2 \leq x$.

2.2 Naivná teória množín a jej paradoxy

{paradox:SECTNAIV}

Základom pôvodného Cantorovho prístupu k teórii množín je nasledujúca definícia množiny: „Množina je akýkoľvek systém objektov, jednoznačne vymedzený nejakou vlastnosťou.“ Inak povedané, množinu si môžeme predstaviť ako nový názov pre nejaký systém objektov, čo nám umožní stručnejšie a jednoduchšie vyjadrovanie.[3]

Súčasne s množinami môžeme robiť rôzne operácie, utvárať nové množiny pomocou niektorých vlastností. Napríklad prienik množín A a B je taká množina, do ktorej patria práve prvky spĺňajúce podmienku $(x \in A) \wedge (x \in B)$, čiže opäť je to systém objektov určený nejakou podmienkou. Stručne to môžeme zapísať

$$A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Potom namiesto „všetky racionálne čísla ležiace v intervale $\langle 0, 1\rangle$“ môžeme použiť stručnejší množinový zápis $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$.

Russellov[4] paradox. Vidíme teda, že každej podmienke zodpovedá nejaká množina prvkov spĺňajúcich túto podmienku. Špeciálne, pokiaľ nepoužijeme žiadnu podmienku (inak povedané, použijeme prázdnu podmienku) dostaneme množinu všetkých množín (všetkých objektov). Mohli by sme ju definovať napríklad ako

$$\mathbf{Set} = \{x; x = x\},$$

keďže podmienku $x = x$ spĺňa každý objekt.

Uvažujme teraz podmienku $x \notin x$. Pomocou nej dostaneme množinu

$$A = \{x; x \notin x\}$$

takých množín, ktoré sú svojimi vlastnými prvkami. Položme si otázku, či do tejto množiny patrí aj množina **Set** všetkých množín. Na jednej strane vieme, že množina **Set** obsahuje

[3]Samozrejme, teória množín nám poskytuje omnoho viac, než len jednoduchší spôsob vyjadrovania. V tejto časti však chceme hlavne ilustrovať problémy, ktoré vznikajú v naivnej teórii množín, aby sme si hneď potom mohli ukázať, ako ich možno axiomatickým prístupom odstrániť. Skutočne zaujímavé výsledky a aplikácie teórie množín stretneme až v ďalších kapitolách.

[4]Bertrand Russell (1872–1970), britský matematik a filozof

všetky množiny, teda aj samu seba. To znamená, že **Set** $\in$ **Set**, a teda **Set** $\in A$. Súčasne si však všimnime, že podmienka **Set** $\in$ **Set** je presne negáciou podmienky určujúcej množinu A, čo znamená, že **Set** $\notin A$. Dostali sme teda dva navzájom si odporujúce výroky **Set** $\in A$ a **Set** $\notin A$, čo je spor.

Zdá sa, že tento paradox bol spôsobený tým, že **Set** je akási neobvyklá, príliš veľká množina. Čiže by možno pomohlo, keby sme sa nejakým spôsobom vedeli vyhýbať „príliš veľkým množinám“. Toto však nie je jediný typ paradoxov, aké v naivnej teórii množín vznikali.

Berryho paradox Zadefinujeme takúto podmnožinu prirodzených čísel

$$B = \{n; n \text{ je prirodzené číslo, ktoré sa dá definovať najviac 20 slovami slovenského jazyka}\}.$$

Napriek tomu, že slovenský jazyk je veľmi bohatý, obsahuje len konečne veľa slov, nech ich je povedzme N. Kombináciou 20 slov dostaneme teda najviac N^{20} slov, čo je stále konečný počet. Existuje teda nekonečne veľa prirodzených čísel, ktoré nepatria do množiny B. Označme najmenšie z nich ako n. Zrejme $n \notin B$, čo znamená, že

$$n \text{ je najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá popísať najviac 20 slovami slovenského jazyka.}$$

Práve sme však číslo n popísali menej ako 20 slovami slovenského jazyka, a teda $n \in B$. Opäť dostávame spor.

Zdá sa, že takýmto problémom by sa dalo vyhnúť, keby sme upresnili, čo rozumieme pod pojmom „vlastnosť“, keď hovoríme o tom, že množina je súbor prvkov určených nejakou vlastnosťou.

2.3 Zermelov-Fraenkelov axiomatický systém

{zfc:SECTZFC}

V časti 2.2 sme videli, že potrebujeme spresniť pravidlá, pomocou ktorých môžeme vytvárať množiny, ak chceme dostať teóriu v ktorej sa nebudú dať odvodiť sporné tvrdenia. Práve to je účelom axiomatizácie teórie množín, ktorú si predstavíme v tejto podkapitole.

Teória množín je založená na dvoch *primitívnych pojmoch* – tak nazývame pojmy, ktoré nedefinujeme.[5] Sú to pojmy *množina* a *patrí* (označujeme $\in$).

Jediné objekty, o ktorých budeme v rámci teórie množín hovoriť, budú množiny. Stručne povedané: „Všetko je množina.“. Jedna množina môže patriť do inej množiny. Tento fakt označíme $a \in b$, jeho negáciu budeme zapisovať $a \notin b$.

Poznámka 2.3.1. Na základe predchádzajúcich riadkov by sa mohlo zdať, že napriek tomu, že názov prednášky je teória množín, sa na nej nedozviete, čo je to vlastne množina je. Nie je to celkom tak – pretože o chvíľu uvedieme viacero axióm popisujúcich, ako sa množiny správajú. Tieto axiómy nám teda hovoria, aké sú vlastnosti množiny, čo je vlastne to najdôležitejšie, čo potrebujeme o množinách vedieť.

S podobnou situáciou ste sa už viackrát stretli na iných matematických predmetoch. Napríklad pri skúmaní grúp nezáležalo na tom, aké majú prvky – grupy, ktoré boli izomorfné (=mali rovnaké grupové vlastnosti) sme považovali z hľadiska teórie grúp za rovnaké. Izomorfizmus medzi dvoma grupami znamená vlastne, že ich nemožno rozlíšiť grupovo-teoretickými prostriedkami. Podobne to bolo i v prípade vektorových priestorov v prvom ročníku na lineárnej algebre.

[5] Primitívnym pojmom sa nedá vyhnúť. Ak by sme každý pojem chceli definovať pomocou ešte jednoduchších pojmov, dostali by sme tak nekonečnú reťaz definícií, ktoré závisia jedna od druhej.

:SSECTJAZYK}

2.3.1 Jazyk teórie množín

V predchádzajúcej podkapitole sme hovorili o tom, že množina je súbor prvkov určených nejakou vlastnosťou. Berryho paradox nás presvedčil o tom, že nemôžeme používať úplne ľubovoľné vlastnosti, iba dostatočne „rozumné“. V tejto časti sa s použitím logiky prvého rádu pokúsime formálne zadefinovať, akými vlastnosťami množín sa budeme zaoberať.

Teória množín bude obsahovať viacero axióm o množinách, z ktorých budeme o množinách môcť odvodiť rôzne tvrdenia. Tieto tvrdenia a axiómy budú mať podobu formúl teórie množín.

Všetky formuly budú zostavené z premenných označujúcich množiny (budeme používať písmená $a, b, c, \dots, z, A, B, \dots, Z$, prípadne $a_1, a_2, \dots$), symbolov $=$ (označuje rovnosť množín), $\in$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ a pomocných symbolov (,), [,], {, } podľa pravidiel popísaných v nasledujúcej definícii:

Definícia 2.3.2.

1. Ak x, y sú množinové premenné, tak $(x = y)$ a $(x \in y)$ sú formuly teórie množín. (Tieto dva typy formúl nazývame *atomické formuly.*)
2. Ak φ, ψ sú formuly teórie množín, tak aj zápisy $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\varphi \Leftrightarrow \psi$ sú formuly teórie množín.
3. Ak x je množinová premenná a φ je formula teórie množín, tak $((\exists x)\varphi)$ a $((\forall x)\varphi)$ sú tiež formuly teórie množín.

Za *formuly teórie množín* považujeme len atomické formuly a formuly, ktoré z nich vieme získať použitím konečného počtu uvedených pravidiel.

2.3.2 Axiómy systému ZFC

Teraz uvedieme jednotlivé axiómy teórie množín a pri niektorých stručne spomenieme aj motiváciu pre ich zavedenie a ich najzákladnejšie dôsledky. Axiomatizácia, ktorú tu uvedieme, nie je jediná používaná, je však najrozšírenejšia. Nazýva sa Zermelov-Fraenkelov systém. (Odtiaľ pochádzajú písmená ZF, písmeno C zastupuje axiómu výberu – Axiom of Choice. Pokiaľ vynecháme axiómu výberu, dostaneme systém ZF.) Kvôli jednotnosti budeme používať rovnaké číslovanie axióm ako v [ŠS], hoci sme zvolili o čosi iné poradie. Spolu s axiómami spomenieme aj niektoré jednoduché tvrdenia, ktoré z nich vyplývajú.

Axióma I (Axióma extenzionality).

$$(\forall x)(\forall y)[(x = y) \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)]$$

Dve množiny sa rovnajú práve vtedy, keď obsahujú rovnaké prvky.

Táto axióma vlastne popisuje základnú vlastnosť množín – množina je jednoznačne určená prvkami, ktoré obsahuje.

Viacero ďalších axióm sa zaoberá tým, existenciou niektorých množín a vytváraním nových množín z už existujúcich množín. Napríklad je pomerne prirodzené požadovať existenciu aspoň jednej množiny, aby náš axiomatický systém nebol úplne bezobsažný. Túto vlastnosť môžeme formálne zapísať napríklad takto.

Axióma IV (Axióma existencie).

$$(\exists x)(x = x)$$

Existuje aspoň jedna množina.

Pre každú množinu platí $x = x$ vďaka vlastnostiam vzťahu rovnosti.

Nasledujú 2 axiómy popisujúce vytváranie množín z iných množín.

Axióma II (Axióma zjednotenia množín).

$$(\forall A)(\exists U)(\forall z)(z \in U \Leftrightarrow (\exists a \in A)(z \in a))$$

Pre ľubovoľnú množinu A existuje taká množina U, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do niektorej z množín patriacich do A.

Definícia 2.3.3. Množinu U z predchádzajúcej axiómy nazývame *zjednotenie systému* A a označujeme $\bigcup A$.

Z axiómy extenzionality je zrejmé, že množina $\bigcup A$ je určená jednoznačne.

Axióma III (Axióma dvojice).

$$(\forall A)(\forall B)(\exists C)(\forall z)[z \in C \Leftrightarrow (z = B) \vee (z = C)]$$

Ak a, b sú množiny, tak existuje množina ktorá obsahuje práve prvky a, b a žiadne iné. Túto množinu označíme $\{a, b\}$.

{zfc:TVRZJEDPAIR}

Tvrdenie 2.3.4. *Pre ľubovoľné množiny A, B existuje taká množina C, do ktorej patria práve prvky patriace do množiny A alebo do množiny B. Túto množinu označujeme $A \cup B$ a nazývame* zjednotenie množín A a B.

Dôkaz. Ak A, B sú množiny, tak podľa axiómy dvojice existuje množina $\{A, B\}$ a podľa axiómy zjednotenie existuje množina C, ktorá obsahuje práve prvky patriace do niektorej z množín A, B. □

Ďalšou aplikáciou axiómy dvojice je nasledujúce jednoduché tvrdenie:

{zfc:TVRSINGLETON}

Tvrdenie 2.3.5. *Pre každú množinu a existuje jediná množina A, ktorá obsahuje a ako jediný svoj prvok, t.j.*

$$z \in A \Leftrightarrow z = a.$$

Túto množinu označujeme $\{a\}$.

Dôkaz. Na dôkaz existencie stačí použiť axiómu dvojice pre dvojicu množín a, a. Jednoznačnosť vyplýva z axiómy extenzionality. □

Nasledujúca axióma vlastne zahŕňa nekonečne veľa axióm – jednu pre každú formulu teórie množín. Preto hovoríme o schéme axióm.

Axióma V (Schéma axióm vymedzenia). Nech $\varphi(x)$ je formula teórie množín, ktorá neobsahuje B ako voľnú premennú. Potom platí

$$(\forall A)(\exists B)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow z \in A \wedge \varphi(z))$$

Pre každú množinu A existuje množina B obsahujúca práve tie prvky z A, pre ktoré je pravdivý výrok $\varphi(z)$, ktorý dostaneme nahradením všetkých voľných výskytov premennej x premennou z. Túto množinu budeme označovať

$$B := \{x \in A; \varphi(x)\}.$$

Všimnime si, že s podobným spôsobom tvorby množín sme sa už stretli v časti 2.2. Nastala však jedna drobná zmena – do novovytvorenej množiny patria len prvky z nejakej vopred danej množiny s danou vlastnosťou. Teda pomocou tejto axiómy nemôžeme zopakovať postup, ktorý sme urobili pri odvodení Russellovho paradoxu.

Túto schému axióm budeme veľmi často využívať, ako ukážku si môžeme ukázať existenciu prázdnej množiny.

Tvrdenie 2.3.6. *Existuje (práve jedna) množina $\emptyset$ s vlastnosťou*

$$(\forall z)(z \notin \emptyset).$$

Túto množinu nazývame prázdna množina.

Dôkaz. Jednoznačnosť ľahko vyplýva z axiómy extenzionality. Ukážeme existenciu.

Podľa axiómy existencie existuje aspoň jedna množina x. Definujme teraz množinu

$$\emptyset := \{z \in x; z \neq z\}.$$

□

Môžeme poznamenať, že v niektorých textoch sa namiesto axiómy existencie uvádza ako axióma existencia prázdnej množiny. Z predchádzajúceho tvrdenia je zrejmé, že takto dostaneme ekvivalentný systém axióm – pomocou ostatných axióm vieme z axiómy existencie dokázať existenciu prázdnej množiny a obrátene.

Schému axióm vymedzenia použijeme napríklad aj v nasledujúcej podkapitole, keď budeme definovať viaceré množinové operácie. Na tomto mieste ešte zadefinujeme prienik dvojice množín.

Tvrdenie 2.3.7. *Pre ľubovoľné dve množiny A, B existuje množina C, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria súčasne do A aj do B. Túto množinu nazývame* prienik množín A a B *a označujeme ju $A \cap B$.*

Dôkaz. Množina

$$A \cap B = \{x \in A; x \in B\}$$

existuje podľa schémy axióm vymedzenia použitej pre množinu A a formulu $x \in B$. □

Definícia 2.3.8. Množiny A a B sa nazývajú *disjunktné,* ak $A \cap B = \emptyset$, t.j. ak majú prázdny prienik.

Pred uvedením ďalšej axiómy budeme potrebovať ešte jednu definíciu, ktorá nám umožní túto axiómu stručnejšie zapísať.

Definícia 2.3.9. Ak A, B sú množiny, tak hovoríme, že A je *podmnožinou* B, ak každý prvok množiny A je prvkom množiny B. Tento fakt označíme $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

Vidíme teda, že $A \subseteq B$ je tiež formula teórie množín. Budeme ju často používať ako stručnejší zápis namiesto dlhšej formuly na pravej strane predchádzajúcej ekvivalencie.

Axióma VI (Axióma potenčnej množiny).

$$(\forall A)(\exists P)(\forall z)(z \in P \Leftrightarrow z \subseteq A)$$

Pre každú množinu A existuje množina P pozostávajúca práve z podmnožín množiny A.

Definícia 2.3.10. Množinu všetkých podmnožín množiny A nazývame *potenčná množina* množiny A a označujeme $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$

Axióma VI teda vlastne zaručuje existenciu potenčnej množiny pre každú množinu.

Kvôli zostručneniu nasledujúcej axiómy zaveďme ešte jeden symbol.

Definícia 2.3.11. Symbolom $(\exists! x)P(x)$ označujeme fakt, že existuje jediná množina x s vlastnosťou $P(x)$.

Všimnime si, že sme tým nepridali nič nové k jazyku logiky prvého rádu, keďže ten výrok vieme ekvivalentne prepísať napríklad takýmto spôsobom

$$(\exists! x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \Rightarrow y = x)).$$

Zápis $(\exists! x)P(x)$ môžeme teda chápať ako skratku zápisu na pravej strane. V prípade, že $P(x)$ je formula teórie množín, predstavuje aj tento zápis formulu teórie množín.

Pre úplnosť uveďme aj ostatné axiómy, hoci ich významom sa budeme podrobnejšie zaoberať neskôr.

Axióma VIII (Schéma axióm substitúcie). Nech $\varphi(x, y)$ je formula teórie množín, ktorá neobsahuje B ako voľnú premennú. Potom platí

$$(\forall A)[(\forall x \in A)(\exists! y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists B)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, z))].$$

Význam tejto axiómy by mohol bude jasnejší po zavedení pojmu funkcie – pozri poznámku 3.2.10. Poznamenajme tiež, že zo schémy axióm substitúcie vyplýva schéma axióm vymedzenia. Obe axiómy sa však zvyknú uvádzať, do istej miery snáď z historických dôvodov (schéma axióm substitúcie bola do axiomatického systému teórie množín zahrnutá neskôr) a azda aj preto, že schéme axióm vymedzenia je podstatne jednoduchšia a názornejšia.

Axióma (Axióma regularity).

$$(\forall A)[(\exists B)(B \in A) \Rightarrow (\exists B \in A)\neg[(\exists c)(c \in A \wedge c \in B)]]$$

Každá neprázdna množina obsahuje množinu, ktorá je s ňou disjunktná.

Axióma X (Axióma nekonečnej množiny).

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)]$$

Doteraz uvedené axiómy sa zvyknú označovať ako axiomatický systém ZF. Po pridaní nasledujúcej axiómy už dostaneme celý systém ZFC.

Axióma VIII (Axióma výberu).

$$(\forall \mathcal{S})[(\forall A \in \mathcal{S})(A \neq \emptyset) \wedge (\forall A \in \mathcal{S})(\forall B \in \mathcal{S})(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (\exists V)(\forall A \in \mathcal{S})(\exists x)(V \cap A = \{x\})]$$

Axióma výberu je veľmi dôležitá axióma. Neskôr si uvedieme zrozumiteľnejšiu ekvivalentnú formuláciu tejto axiómy. Axiómou výberu sa budeme podrobne zaoberať v kapitole 5.

Veľmi dobre napísané poznámky o motivácii a význame jednotlivých axióm si môžete prečítať napríklad v [Z2, s.79–83][6]. (Môžete si tam prečítať aj o axiómach, ktorými sa v tomto texte podrobne nezaoberáme, ako je axióma regularity.)

[6] Táto kniha je voľne dostupná na internete

2.4 Operácie s množinami

V tejto časti sa budeme venovať niektorým operáciam s množinami a ukážeme si tvrdenia, ktoré o nich platia. Tieto výsledky majú veľmi jednoduché a názorné dôkazy, preto sa od vás očakáva, že takéto tvrdenia budete schopní samostatne dokazovať a ba dokonca aj na ne prísť, keď ich budete potrebovať použiť.

V predchádzajúcej kapitole sme definovali vzťah „byť podmnožinou“, ktorý sa zvykne nazývať aj *inklúziou.*

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

Nasledujúce tvrdenie zhŕňa základné vlastnosti inklúzie.

Tvrdenie 2.4.1. *Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Potom platí:* {oper:TVRSUBSET}

(i) *Pre každú množinu platí $A \subseteq A$.* {oper:itSUB1}
(ii) *$A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.* {oper:itSUB2}
(iii) *Ak platí $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$.* {oper:itSUB3}

Dôkaz. (i) Uvedené tvrdenie je ekvivalentné s platnosťou implikácie $x \in A \Rightarrow x \in A$ pre ľubovoľné x. Pravdivosť tejto implikácie vyplýva z tautológie $P \Rightarrow P$ ak v nej za výrok P dosadíme $x \in A$.

(ii) Vyplýva priamo z definície podmnožiny (s použitím axiómy extenzionality a tautológie z úlohy 2.1.1b)).

(iii) Stačí použiť tautológiu $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$. □

Tvrdenie 2.4.1(ii) niekedy budeme používať na dôkaz rovnosti množín – môžeme dokazovať to, že množiny A a B sa rovnajú tak, že zvlášť dokážeme inklúzie $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

Definícia 2.4.2. Ak A je podmnožina B a súčasne $A \neq B$, tak hovoríme, že A je *vlastná podmnožina* množiny B. Označenie $A \subsetneq B$.

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

Poznámka 2.4.3. V tomto texte používam $\subseteq$ na označenie podmnožiny a $\subsetneq$ na označenie vlastnej podmnožiny. Toto označenie som zvolil z toho dôvodu, že som sa chcel vyhnúť možným nedorozumeniam. Dosť často sa na označenie inklúzie používa $\subset$, nájdu sa však aj texty (hoci zriedkavejšie), v ktorých $\subseteq$ je symbolom pre podmnožinu, zatiaľčo $\subset$ označuje vlastnú podmnožinu.

Budeme teraz pokračovať tým, že pripomenieme niektoré operácie, ktoré sme definovali v predchádzajúcej podkapitole a zadefinujeme niekoľko nových.

Pre dvojicu množín sme zatiaľ zadefinovali zjednotenie a prienik množín.

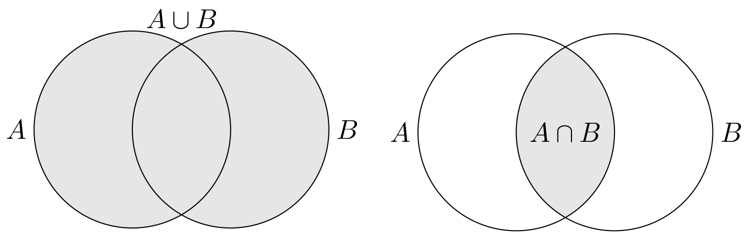
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \in A; x \in B\}$$

Tieto operácie sú znázornené na obrázku 2.1 pomocou Vennových diagramov. (Vennovým diagramom sa ešte budeme podrobnejšie venovať v časti 2.4.)

Na tomto mieste si môžeme pripomenúť, že pre konečné množiny ste sa na diskrétnej matematiky naučili vypočítať počet prvkov zjednotenia dvoch množín:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|.$$

(Podobné vzťahy pre viac ako dve množiny viete takisto odvodiť použitím princípu zapojenia a vypojenia.)



Obr. 2.1: Zjednotenie a prienik dvoch množín {oper:FIGZJEDI

Na príklade týchto dvoch operácií si ukážeme, ako môžeme dokazovať rôzne množinové identity. (Keďže však ide o jednoduché dôkazy, ktoré sa dajú ľahko previesť na overovanie tautológií, väčšinu z nich ponecháme ako cvičenie.)

{oper:TVRZJEDI

Tvrdenie 2.4.4. *Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:*

{oper:it1ZJEDPRIEN} (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*asociatívnosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$);
(ii) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (*komutatívnosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$);
{oper:itDISTRIB} (iii) $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$;
{oper:itIDEMP} (iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributívnosť*);
{oper:it6ZJEDPRIEN} (v) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (*idempotentosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$)
(vi) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (*zákony absorpcie*).

Dôkaz. (i) Na základe axiómy extenzionality sa dve množiny rovnajú práve vtedy, keď obsahujú rovnaké prvky. Teda nám stačí ukázať, že platí

$$x \in A \cup (B \cup C) \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in (A \cup B) \cup C.$$

Priamo na základe definície zjednotenia môžeme výrok $x \in A \cup (B \cup C)$ prepísať ako $(x \in A) \vee [(x \in B) \vee (x \in C)]$. Podobne výrok na pravej strane ekvivalencie je ekvivalentný s výrokom $[(x \in A) \vee (x \in B)] \vee (x \in C)$. Ak si teda označíme $p := (x \in A)$, $q := (x \in B)$ a $r := (x \in C)$, tak vlastne máme dokázať

$$p \vee (q \vee r) \qquad \Leftrightarrow \qquad (p \vee q) \vee r,$$

čo je presne tautológia z úlohy 2.1.2a).

Veľmi podobným spôsobom sa dá druhá časť tohoto tvrdenia previesť na tautológiu 2.1.2b). $\square$

V predchádzajúcom dôkaze sme videli jeden možný spôsob dôkazu množinových identít – založený na tom, že dokazovanú identitu prevedieme na tautológiu, ktorú potom overujeme. Inou možnosťou je dôkaz spočívajúci v algebraickej manipulácii – pokiaľ máme už dokázaný dostatočne veľa identít, môžeme ich použiť na dôkaz nových identít; takýto postup si ukážeme napríklad v príklade 2.4.8. V závere tejto podkapitoly sa budeme ešte venovať metóde dôkazu množinových identít pomocou Vennových diagramov.

Niekedy budeme potrebovať urobiť prienik nie len jednej množiny, ale celého systému množín.

Ak $\mathcal{S}$ je množina, tak podľa axiómy zjednotenia existuje jej zjednotenie, ktoré budeme označovať $\bigcup \mathcal{S}$. Dosť často hovoríme v takomto prípade o *zjednotení systému množín,* pretože jednotlivé prvky množiny $\mathcal{S}$ chápeme ako množiny.

Budeme často používať aj dve ďalšie označenia pre zjednotenie systému množín, konkrétne $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{S}} A$ a v prípade, že $\mathcal{S} = \{A_i; i \in I\}$, tak zjednotenie tohoto systému označíme $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Poznamenajme, že zápisom $\mathcal{S} = \{A_i; i \in I\}$ rozumieme to, že pre každý prvok množiny $i \in I$ je jednoznačne určená množina A_i. Potom podľa schémy axióm substitúcie existuje aj množina $\{A_i; i \in I\}$ a podľa axiómy zjednotenia existuje zjednotenie tejto množiny.

Budeme používať aj prienik systému množín – pre systém $\mathcal{S} = \{A_i; i \in I\}$ zavedieme označenia:

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A\in\mathcal{S}} A := \{z; (\forall A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{z; (\forall i \in I) z \in A_i\}$$

Existenciu prieniku $\mathcal{S}$ môžeme zdôvodniť pomocou schémy axióm vymedzenia – túto množinu totiž môžeme ekvivalentne zapísať ako $\{z \in \bigcup \mathcal{S}; (\forall A \in \mathcal{S}) z \in A\}$.

Na dôkaz rôznych identít platných pre prienik a zjednotenie systému množín môžeme použiť podobný prístup ako pre prienik a zjednotenie dvoch množín, ibaže namiesto tautológií v tomto prípade dostaneme výroky s kvantifikátormi, ktorých platnosť bude treba overiť.

Nasledujúce tvrdenie hovorí, že distributívnosť platí aj pre prienik a zjednotenie systému množín:

{oper:TVRDISTRIBSYSTEM}

Tvrdenie 2.4.5. *Nech $\mathcal{S}$ a B sú ľubovoľné množiny. Potom platí:*
(i) $B \cap \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{S}} (B \cap A)$;
(ii) $B \cup \bigcap_{A\in\mathcal{S}} A = \bigcap_{A\in\mathcal{S}} (B \cup A)$.

Dôkaz. Opäť ukážeme iba prvú časť tvrdenia, druhú identitu ponechávame ako cvičenie.

Pokúsme sa (podľa definície) prepísať, čo to znamená, že prvok x patrí do množiny uvedenej na ľavej strane dokazovanej rovnosti. Použitíme definície prieniku dvoch množín a prieniku systému množín dostaneme, že

$$x \in B \cap \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A \Leftrightarrow (x \in B) \wedge (\forall A \in \mathcal{S}) x \in A.$$

Pre množinu na pravej strane rovnosti dostávame

$$x \in \bigcup_{A\in\mathcal{S}} (B \cap A) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{S})(x \in B \wedge x \in A).$$

Ak označíme $p := (x \in B)$ a $Q(A) := x \in A$, tak vlastne máme overiť ekvivalenciu

$$p \wedge (\forall A \in \mathcal{S}) Q(A) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{S}) p \wedge Q(A).$$

To je presne ekvivalencia z úlohy 2.1.7c). □

Dokážeme aj niektoré vzťahy medzi množinovými operáciami a reláciou inklúzie.

{oper:TVRSUBEKV}

Tvrdenie 2.4.6. *Nech A a B sú množiny. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:* {oper:it1SUBEKV}
(i) $A \subseteq B$; {oper:it2SUBEKV}
(ii) $A = A \cap B$; {oper:it3SUBEKV}
(iii) $B = A \cup B$.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Podmienka $A \subseteq B$ znamená platnosť implikácie $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ pre ľubovoľné x.

Ak $x \in A$, tak na základe tejto implikácie platí aj $x \in B$, čiže platí $(x \in A) \wedge (x \in B)$, t.j. $x \in A \cap B$. Tým je dokázaná inklúzia $A \subseteq A \cap B$.

Obrátene, z $x \in A \cap B$, t.j. $(x \in A) \wedge (x \in B)$ vyplýva $x \in A$. (Tu dokonca nepotrebujeme podmienku $A \subseteq B$. Používame vlastne tautológiu $p \Rightarrow (p \wedge q)$.) Teda platí aj inklúzia $A \cap B \subseteq A$.

Spojením týchto dvoch inklúzií dostávame rovnosť $A = A \cap B$.

Dôkaz implikácie (i) $\Rightarrow$ (iii) je veľmi podobný ako dôkaz predchádzajúcej časti, ponechávame ho ako cvičenie.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Predpokladajme, že platí $A = A \cap B$. Ak $x \in A$, tak potom $x \in A \cap B$, čo znamená, že $(x \in A) \wedge (x \in B)$. Teda x patrí aj do množiny B. Tým je ukázaná inklúzia $A \subseteq B$.

Dôkaz implikácie (iii) $\Rightarrow$ (i) opäť prenecháme čitateľovi. $\square$

{oper:TVRSUB}

Tvrdenie 2.4.7. *Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:*

{oper:it1SUB} (i) $\emptyset \subseteq A$;

{oper:it2SUB} (ii) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;

{oper:it3SUB} (iii) *Ak* $A \subseteq B$, *tak* $A \cap C \subseteq B \cap C$ *a* $A \cup C \subseteq B \cup C$.

Dôkaz. (i): Množina $\emptyset$ neobsahuje žiadny prvok, teda každý prvok z $\emptyset$ patrí aj do A.

(ii): Platí $x \in A \cap B \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \Rightarrow x \in A$. Tým je dokázaná inklúzia $A \cap B \subseteq A$.

Podobne z $x \in A$ vyplýva $(x \in A) \vee (x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cup B$, a teda platí $A \subseteq A \cup B$.

(iii): Predpokladáme, že $A \subseteq B$, čiže platí implikácia $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$. Potom platí aj $[(x \in A) \wedge (x \in B)] \Rightarrow [(x \in A) \wedge (x \in C)]$ (na základe tautológie $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$); čo je len inak zapísaná implikácia $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap C$. Dôkaz druhej časti sa dá urobiť úplne analogicky.

Skúsme ešte urobiť dôkaz druhej časti pomocou tvrdenia 2.4.6. (Touto metódou by sa samozrejme dala dokazovať aj prvá časť tvrdenia.) Vieme teda, že platí $B = A \cup B$ a radi by sme pomocou toho dokázali $(A \cup C) \cup (B \cup C) = B \cup C$. Z tvrdenia 2.4.4 vieme, že operácia $\cup$ je asociatívna (výrazy obsahujúce len túto operáciu môžeme ľubovoľne prezátvorkovať), komutatívna (množiny môžeme vymieňať) a idempotentná. Pomocou týchto vlastností skutočne dostaneme

$$(A \cup B) \cup (B \cup C) = [A \cup (B \cup C)] \cup C = (A \cup B) \cup C = B \cup C.$$

$\square$

Ako príklad použitia predchádzajúcich tvrdení uvedieme iný dôkaz tvrdenia 2.4.4(vi).

{oper:PRABSORP}

Príklad 2.4.8. $A \cap (A \cup B) \overset{(1)}{=} (A \cap A) \cup (A \cap B) \overset{(2)}{=} A \cup (A \cap B) \overset{(3)}{=} A$, pričom v jednotlivých rovnostiach sme použili:
(1) distributívnosť – tvrdenie 2.4.4(iv)
(2) idempotentnosť – tvrdenie 2.4.4(v)
(3) fakt, že $A \cap B \subseteq A$ – tvrdenie 2.4.7(ii) – a tvrdenie 2.4.6 pre množiny $A \cap B$ a A.

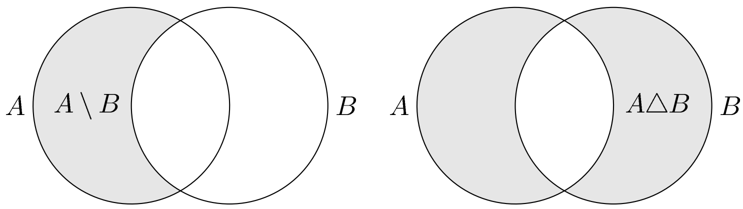
Ďalšie operácie, ktoré budeme niekedy používať sú rozdiel a symetrická diferencia (symetrický rozdiel) dvoch množín.

Definícia 2.4.9. *Rozdiel množín* A a B je množina

$$A \smallsetminus B := \{x \in A; x \notin B\}.$$

Symetrická diferencia množín A a B je množina

$$A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$$



Obr. 2.2: Vennove diagramy pre $A \smallsetminus B$ a $A \triangle B$ {oper:FIGROZD}

Symetrický rozdiel je teda množina tých prvkov, ktoré patria práve do jednej z množín A, B. Zodpovedá logickej spojke XOR. {oper:TVRSETMINUS}

Tvrdenie 2.4.10. *Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:* {oper:itDEMORGAN}

(i) $A \smallsetminus (B \cap C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus C)$, $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C)$;
(ii) $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \smallsetminus C$;
(iii) $A \smallsetminus (B \smallsetminus C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \cap C)$;
(iv) $(A \cup B) \smallsetminus C = (A \smallsetminus C) \cup (B \smallsetminus C)$, $(A \cap B) \smallsetminus C = (A \smallsetminus C) \cap (B \smallsetminus C)$;
(v) $A \smallsetminus B = A \smallsetminus (A \cap B)$;
(vi) $(A \smallsetminus B) \cap C = (A \cap C) \smallsetminus B = A \cap (C \smallsetminus B)$;
(vii) $(A \smallsetminus B) \cup C = (A \cup C) \smallsetminus (B \smallsetminus C)$;
(viii) $A \cup B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) \cup (A \cap B)$;
(ix) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \smallsetminus B = \emptyset$. {oper:itDEMORGANSYS}
(x) *Ak pre každé $i \in I$ je B_i množina, tak platí* $A \smallsetminus \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \smallsetminus B_i)$ *a* $A \smallsetminus \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \smallsetminus B_i)$. {oper:itSMSUBSET}
(xi) *Ak* $B \subseteq C$, *tak* $A \smallsetminus C \subseteq A \smallsetminus B$.

Časti (i) a (x) sa zvyknú nazývať *de Morganove zákony*. {oper:TVRSYMDIF}

Tvrdenie 2.4.11. *Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:*

(i) $A \triangle B = B \triangle A$; {oper:itASOCSYMDIF}
(ii) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
(iii) $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle \emptyset = A$;
(iv) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$;
(v) $A \smallsetminus B = A \triangle (A \cap B)$.

Dôkaz. (ii) Štandardným spôsobom prevedieme uvedené tvrdenie na dôkaz tautológie $(p \,\mathrm{XOR}\, q) \,\mathrm{XOR}\, r \Leftrightarrow p \,\mathrm{XOR} (q \,\mathrm{XOR}\, r)$, pričom logická spojka XOR je určená tabuľkou

p	q	$p \,\mathrm{XOR}\, q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pri dokazovaní našej tautológie potom dostávame nasledujúcu tabuľku:

p	q	r	$p\,\mathrm{XOR}\,q$	$a := (p\,\mathrm{XOR}\,q)\,\mathrm{XOR}\,r$	$q\,\mathrm{XOR}\,r$	$b := p\,\mathrm{XOR}(q\,\mathrm{XOR}\,r)$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

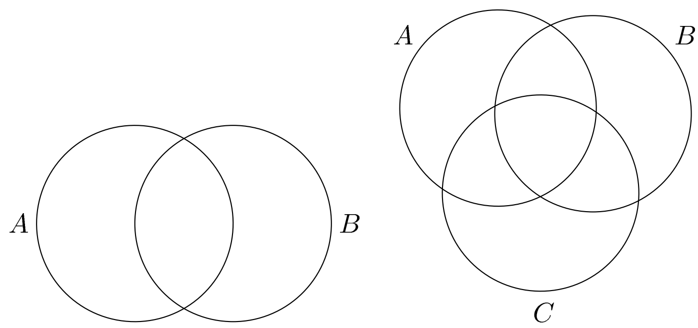
□

Vennove diagramy

{oper:SSSECTVENN}

Pri dôkazoch množinových identít môžeme použiť aj *Vennove diagramy.* Pri nich znázorníme množiny ako rovinné útvary, pričom dbáme na to, aby množiny boli v tzv. *generickej polohe,* t.j. aby sa tam vyskytli „všetky možné“ oblasti. (Napríklad oblasť predstavujúca prvky patriace do A aj B a nepatriace do C, ak kreslíme Vennov diagram pre 3 množiny.)

Na obrázku 2.3 sú znázornené 2 resp. 3 množiny v generickej polohe. (Môžete sa pokúsiť vymyslieť, ako by ste kreslili Vennove diagramy pre viac množín.)



{oper:FIGGENER} Obr. 2.3: Generická poloha

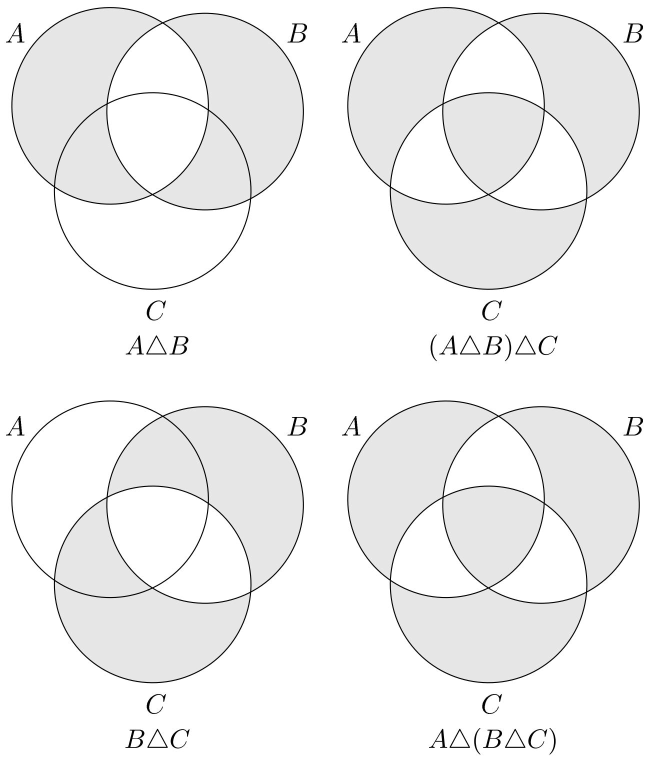
Pri dôkaze postupujeme tak, že vo Vennovom diagrame nakreslíme postupne, ako vyzerajú množiny na ľavej a pravej strane rovnosti a tieto obrázky porovnáme.

Príklad 2.4.12. Ako príklad si ukážeme dôkaz asociatívnosti pre operáciu $\triangle$ (tvrdenie 2.4.11(ii)). Dôkaz toho istého tvrdenia overením príslušnej tautológie tabuľkovou metódou sme už videli.

Na obrázku 2.4 vidíme, ako môžeme postupovať. Najprv (ako pomôcku) sme si nakreslili oblasť zodpovedajúcu množine $A\triangle B$ a potom, pomocou nej, sme dostali množinu $(A\triangle B)\triangle C$ vystupujúcu na ľavej strane rovnosti.

Analogicky postupujeme pre množinu $A\triangle(B\triangle C)$ na pravej strane rovnosti. Vidíme, že sme dostali presne rovnaké obrázky, čiže rovnosť $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$ platí.

Môžete sa pýtať, do akej miery je dôkaz pomocou Vennových diagramov korektný. (Od prvého ročníka na vysokej škole ste už určite veľakrát počuli, že „obrázok nie je dôkaz“.) Odpoveď je, že tento dôkaz je úplne rovnocenný s overením príslušnej tautológie tabuľkovou



er:FIGSYMDIF}

Obr. 2.4: Asociatívnosť operácie $\triangle$

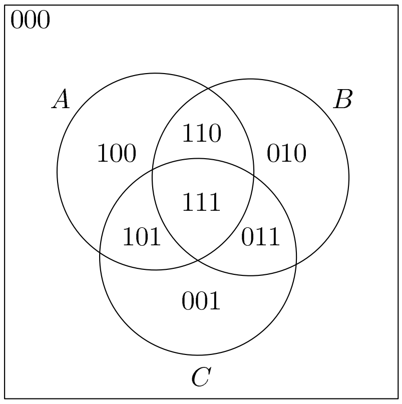
metódou. Robíme tam totiž presne to isté, čo pri tabuľkovej metóde, len namiesto symbolov 0 a 1 používame farebné zvýraznenie niektorej oblasti – pozri obrázok 2.5. Môžete si teda vybrať ktorúkoľvek z týchto dvoch metód a používať tú, ktorá vám väčšmi vyhovuje a pri ktorej máte menšiu obavu z toho, že by ste spravili chybu.

Cvičenia

Úloha 2.4.1. Dokážte tvrdenia 2.4.4, 2.4.6, 2.4.7, 2.4.5, 2.4.10, 2.4.11; resp. tie časti uvedených tvrdení, ktoré sme nedokázali v predchádzajúcom texte. (Vyskúšajte si aspoň na niektorom príklade tabuľkovú metódu aj Vennove diagramy; v prípade tvrdení týkajúcich sa inklúzie si môžete vyskúšať dôkaz priamo z definície ako aj použitie tvrdenia 2.4.6.)

Úloha 2.4.2. Pokúste sa vymyslieť nejaké možné nakreslenia Vennovho diagramu pre 4 (prípadne aj viac) množín.

Úloha 2.4.3. Zistite, či sú uvedené tvrdenia pravdivé (pre ľubovoľný výrok $P(x)$). V prípade nepravdivých tvrdení rozhodnite, či aspoň jedna z implikácií je pravdivá. Svoje tvrdenie zdôvodnite!
a) $[(\exists x \in A)P(x) \vee (\exists x \in B)P(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in A \cup B)P(x)$
b) $[(\forall x \in A)P(x) \vee (\forall x \in B)P(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in A \cup B)P(x)$
c) $[(\forall x \in A)P(x) \wedge (\forall x \in B)P(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in A \cup B)P(x)$
e) $[(\exists x \in A)P(x) \wedge (\exists x \in B)P(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in A \cap B)P(x)$
f) $[(\forall x \in A)P(x) \vee (\forall x \in B)P(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in A \cap B)P(x)$
g) $[(\forall x \in A)P(x) \wedge (\forall x \in B)P(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in A \cap B)P(x)$.



Obr. 2.5: Vzťah medzi Vennovým diagramom a tabuľkou {oper:FIGVENN3

{kartez:SECTKARTEZ}

2.5 Usporiadané dvojice a karteziánsky súčin

Posledný typ operácie definovanej na množinách, ktorým sa budeme zaoberať, je karteziánsky súčin. Tu ho zadefinujeme pre dve množiny, resp. pre konečný počet množín, neskôr (v časti 3.2.1) ho zadefinujeme aj karteziánsky súčin ľubovoľného systému množín. Na to, aby sme mohli zadefinovať karteziánsky súčin dvoch množín, však najprv potrebujeme definovať pojem usporiadanej dvojice.

Definícia 2.5.1. Nech a, b sú množiny. Potom množinu

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

nazývame *usporiadanou dvojicou* množín a a b.

Táto definícia sa môže na prvý pohľad zdať neobvyklá. Treba si uvedomiť, že pracujeme iba s množinami a každý objekt chceme definovať ako nejakú množinu. Ľahko si môžete všimnúť, že množina uvedená v definícii skutočne existuje – stačí viackrát použiť axiómu dvojice. Menej zrejmé je, prečo by práve takáto množina mala byť vhodnou definíciou usporiadanej množiny. Odpoveď je, že spĺňa základnú vlastnosť, ktorú od usporiadaných množín vyžadujeme – sformulovanú v nasledujúcom tvrdení. (Pokojne by sme mohli použiť aj akúkoľvek inú definíciu usporiadanej dvojice, ktorá by vyhovovala tejto požiadavke.)

{kartez:TVRUSPDVOJ}

Tvrdenie 2.5.2. *Nech a, b, c, d sú množiny. Potom*

$$(a, b) = (c, d) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c \wedge b = d.$$

Dôkaz. Platnosť implikácie $\Leftarrow$ je jasná.

$\boxed{\Rightarrow}$ Predpokladáme, že platí $(a, b) = (c, d)$, t.j. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Potom $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, čo znamená, že buď $\{a\} = \{c\}$ alebo $\{a\} = \{c, d\}$.

V prvom z uvedených prípadov dostaneme $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$. Ak $b = a$, tak túto rovnosť môžeme prepísať ako $\{\{a\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$, čo ale znamená, že $\{a\} = \{a, d\}$, a teda $a = d$.

Ak $b \neq a$, tak $\{a, b\} \neq \{a\}$, a preto musí platiť $\{a, b\} = \{a, d\}$ a $b = d$.

Zostáva nám rozmyslieť si druhú možnosť, keď $\{a\} = \{c, d\}$. Táto rovnosť ale znamená, že $a = c = d$. Potom pôvodnú rovnosť môžeme prepísať ako $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{a\}$ a zopakovaním rovnakej úvahy, ako sme použili pred chvíľou, dostaneme $a = b = c = d$. □

Teraz už môžeme zadefinovať karteziánsky súčin dvoch množín.

Definícia 2.5.3. Karteziánsky súčin množín A a B je množina, ktorej prvkami sú práve také usporiadané dvojice, kde prvý prvok patrí do množiny a a druhý prvok patrí do množiny b. Túto množinu označujeme

$$A \times B := \{(a,b); a \in A, b \in B\}.$$

Ešte overíme na základe axióm existenciu množiny $A \times B$. Všimnime si, že $\{a\} \subseteq A \cup B$ aj $\{a,b\} \subseteq A \cup B$ pre ľubovoľné prvky $a \in A$, $b \in B$. Teda $\{a\}, \{a,b\} \in \mathcal{P}(\{)A \cup B\}$ a $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Vďaka tomu môžeme karteziánsky súčin prepísať ako

$$A \times B = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)); (\exists a \in A)(\exists b \in B) x = (a,b)\}.$$

Existencia takejto množiny je zaručená schémou axióm vymedzenia.[7]

Je zrejmé, že uvedená definícia sa dá veľmi ľahko rozšíriť pre konečný počet množín.

Uvedieme niektoré základné vlastnosti karteziánskeho súčinu. Opäť, ako obvykle, dôkazy viacerých z nich ponecháme ako cvičenie.

{kartez:TVROPER}

Tvrdenie 2.5.4. *Nech A, B, C sú množiny. Potom platí*
(i) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
(iii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
(iv) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Dôkaz. Ukážeme druhú časť tvrdenia – ostatné zostanú ako cvičenie pre čitateľa.

Prvok x patrí do množiny $A \times (B \cup C)$ práve vtedy, keď $x = (a,d)$ pre nejaké $a \in A$ a $d \in B \cup C$. To znamená, že $d \in B$ alebo $d \in C$. Teda dostávame, že $x \in A \times (B \cup C)$ práve vtedy, keď $x = (a,d)$ pre nejaké $a \in A$ a $d \in B$ alebo $x = (a,d)$ pre nejaké $a \in A$ a $d \in C$. Posledná časť je ale len iný zápis toho, že $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$. □

Ukážeme si na konkrétnych príkladoch, že karteziánsky súčin nie je vo všeobecnosti komutatívny ani asociatívny.

Príklad 2.5.5. Nájdite príklad množín A, B takých, že $A \times B \neq B \times A$!

Stačí zobrať ľubovoľné dve jednoprvkové množiny $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ také, že $a \neq b$. (Napríklad $a = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$.)

Potom aj množiny $A \times B = \{(a,b)\}$ a $B \times A = \{(b,a)\}$ sú jednoprvkové. Ak by sa rovnali, znamenalo by to, že $(a,b) = (b,a)$ a podľa tvrdenia 2.5.2 $a = b$, čo je spor.

Príklad 2.5.6. Nájdite príklad množín A, B, C takých, že $A \times (B \times C) \neq A \times (B \times C)$!

Opäť vystačíme s jednoprvkovými množinami. Vyskúšajme $A = B = C = \{\emptyset\}$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= \{\emptyset\} \times \{(\emptyset,\emptyset)\} = \{(\emptyset,(\emptyset,\emptyset))\} \\ (A \times B) \times C &= \{(\emptyset,\emptyset)\} \times \{\emptyset\} = \{((\emptyset,\emptyset),\emptyset)\} \end{aligned}$$

Ak by sa tieto dve množiny rovnali, tak by platilo $(\emptyset,(\emptyset,\emptyset)) = ((\emptyset,\emptyset),\emptyset)$ a podľa tvrdenia 2.5.2 aj $\emptyset = (\emptyset,\emptyset)$. Podľa definície usporiadanej dvojice ale $(\emptyset,\emptyset) = \{\{\emptyset\}\}$, čo nie je prázdna množina.

[7] V ďalších kapitolách už nebudeme väčšinou posupovať úplne podrobne až k axiómam vo všetkých dôkazoch. Každopádne na základe ukážok, ktoré ste videli doteraz, by mohlo byť pre vás aj pri ďalších dôkazoch predstaviteľné, že sa dajú prepísať až na postupnosť logických krokov, ktoré využívajú iba axiómy systému ZFC.

Cvičenia

Úloha 2.5.1. Dokážte ostatné časti tvrdenia 2.5.4.

{triedy:SSECTTRIEDY}

2.5.1 Triedy*

Niekedy je v teórii množín vhodné používať okrem pojmu množina aj pojem triedy. Pod triedou rozumieme súhrn všetkých množín spĺňajúcich nejakú danú formulu teórie množín $\varphi(x)$. Pokiaľ by sme sa obmedzili iba na x z nejakej vopred danej množiny A, na základe schémy axióm vymedzenia dostaneme takto opäť množinu. Pokiaľ však chceme hovoriť o všetkých množinách spĺňajúcich $\varphi(x)$, už nemáme zaručené, že to bude množina. Napriek tomu sa niekedy hodí používať množinové zápisy aj pre triedy, treba mať však vždy na pamäti, že nepracujeme s množinami (hoci používame podobné zápisy).

Triedu budeme teda chápať jednoducho ako alternatívny zápis nejakej formuly teórii množín, resp. označenie pre systém množín, ktoré tejto formule vyhovujú (pričom máme na pamäti, že tento systém nemusí byť množinou). S triedami sa dajú robiť niektoré operácie, ako napríklad prienik alebo zjednotenie dvojice tried, dajú sa zaviesť triedové relácie a funkcie. Napríklad inklúziu možno chápať ako reláciu na triede **Set** všetkých množín. Podrobnejšie si o triedach môžete prečítať napríklad v [BŠ, §I.3].

V prípade, že trieda nie je množinou, hovoríme o *vlastnej triede.*

Postup, ktorý sme použili pri Russellovom paradoxe v ZFC môžeme použiť na zdôvodnenie toho, že neexistuje množina všetkých množín, čo vlastne znamená, že systém všetkých množín tvorí vlastnú triedu.

iedy:VTSETISPROPERCLASS}

Veta 2.5.7. *Trieda všetkých množín*

$$\mathbf{Set} = \{x; x = x\}$$

je vlastnou triedou. (*Inak povedané, neexistuje množina všetkých množín.*)

Dôkaz. Označme $\mathbf{Set} = \{x; x = x\}$ triedu všetkých množín. (Keďže sem patria všetky množín spĺňajúce formulu $x \in x$, ide skutočne o triedu.)

Nech by **Set** bola množina. Potom (podľa schémy axióm vymedzenia) aj

$$A = \{x \in \mathbf{Set}; x \notin x\}$$

by bola množina.

Pre množinu A by potom nastala jedna z možností $A \in A$ alebo $A \notin A$.

Ak platí $A \in A$ tak (podľa definície množiny A) musí platiť $A \notin A$, čo je spor.

Podobne z predpokladu $A \notin A$ dostávame, že $A \in A$, čo je tiež spor.

Predpoklad, že **Set** je množina vedie k sporu – takáto množina preto existovať nemôže (a je to teda skutočne vlastná trieda.) □

Literatúra

[B1] Lev Bukovský. Úvod do matematickej logiky. `http://ics.upjs.sk/~novotnyr/home/skola/logika_a_teoria_mnozin/ltm.pdf`.

[B2] Lev Bukovský. *Štruktúra reálnej osi.* Veda, Bratislava, 1979.

[B3] Lev Bukovský. *Množíny a všeličo okolo nich.* Alfa, Bratislava, 1985.

[BŠ] Bohuslav Balcar and Petr Štěpánek. *Teorie množin.* Academia, Praha, 2001.

[Č1] Juraj Činčura. Elementárna teória čísel. Poznámky k prednáške, `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/cvicenia/tc/`.

[Č2] Juraj Činčura. Model aritmetiky celých nezáporných čísel v teórii množín. `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/2010/temno/cisla.pdf`.

[D] Keith Devlin. *The Joy of Sets.* Springer-Verlag, New York, 1993. Undergraduate Texts in Mathematics.

[E] Herbert B. Enderton. *A Mathematcial Introduction to Logic.* Harcourt/Academic Press, San Diego, 2001.

[F] Thomas Forster. *Logic, Induction and Sets.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003. LMS Student Texts 56.

[GG] Ivor Grattan-Guiness. *The Search for Mathematical Roots 1870–1940.* Princeton University Press, Princeton, 2000.

[H] Horst Herrlich. *The Axiom of Choice.* Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lecture Notes in Mathematics 1876.

[HR] Paul Howard and Jean E. Rubin. *Consequences of the axiom of choice.* Mathematical Surveys and Monographs. 59. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1998.

[J] Thomas J. Jech. *The Axiom of Choice.* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[KGGS] Tibor Katriňák, Martin Gavalec, Eva Gedeonová, and Jaroslav Smítal. *Algebra a teoretická aritmetika 1.* UK, Bratislava, 2002.

[KLŠZ] Milan Kolibiar, Anton Legéň, Tibor Šalát, and Štefan Znám. *Algebra a príbuzné disciplíny.* Alfa, Bratislava, 1992.

[Lev] Azriel Levy. *Basic set theory.* Courier Dover Publications, 2002.

[Lew] Jonathan Lewin. A simple proof of Zorn's lemma. *Amer. Math. Monthly*, 98:353–354, 1991.

[Li] Seymour Lipschutz. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Set Theory and Related Topics*. McGraw-Hill, New York, 1998.

[Moo] Gregory H. Moore. *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[Mos] Y. N. Moschovakis. *Notes on Set Theory*. Springer, New York, 2nd edition, 2006. Undergraduate Texts in Mathematics.

[NRV] John Nolt, Dennis Rohatyn, and Achille Varzi. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Logic*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1998.

[OŠ] Daniel Olejár and Martin Škoviera. *Úvod do teórie diskrétnych matematických štruktúr*. Univerzita Komenského, Bratislava, 2007. `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/texty/dsmain.pdf`.

[RF] Branislav Rovan and Michal Forišek. Formálne jazyky a automaty. Poznámky k prednáške, `http://foja.dcs.fmph.uniba.sk/materialy.php`.

[Sl1] Martin Sleziak. 1-INF-115 Algebra 1. Poznámky k prednáške, `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/`.

[Sl2] Martin Sleziak. Lineárna algebra. Poznámky k prednáške, `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/`.

[So] Antonín Sochor. *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[Š] Petr Štěpánek. Predikátová logika. `http://kti.ms.mff.cuni.cz/teaching/files/materials/StepanekPetr_PredikatovaLogika.pdf`.

[ŠS] Tibor Šalát and Jaroslav Smítal. *Teória množín*. UK, Bratislava, 1995.

[WIK] Wikipedia. `http://en.wikipedia.org`.

[WR] A. N. Whitehead and B. Russell. *Principia mathematica, vol.1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition.

[Z1] Pavol Zlatoš. O dobrom usporiadaní a axióme výberu. `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/wo/DUAC1w.pdf`.

[Z2] Pavol Zlatoš. *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou*. IRIS, Bratislava, 1995. `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/animat/animat.pdf`.

Register

Zoznam symbolov