

## 1 Tretia uloha

**Priklad 1.1.** Zistite, ci mnozina  $M$  vsetkych ohranicenych zobrazeni z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  tvori vektorovy priestor nad polom  $\mathbb{R}$ , pricom scitanie zobrazeni ako aj nasobenie konstantou je bod po bode

$$\begin{aligned}f, g \in M, \quad c \in \mathbb{R} \\(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\(c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x)\end{aligned}$$

Pripominame, ze  $+$  pripadne  $\cdot$  na lavej strane posobi na samotne zobrazenia ... teda  $(f + g)$  a  $c \cdot f$  su nove zobrazenia (z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ ), ktore sme definovali tak, ako je to uvedene na pravej strane (tam uz  $+$  a  $\cdot$  posobia na realne cisla, lebo  $f(x)$  aj  $g(x)$  su uz nejake realne hodnoty).

Zobrazenie  $f$  je ohranicene, ak existuje kladne realne cislo  $K$  take, ze pre vsetky  $x$  plati  $|f(x)| < K$ . Prikladom ohraniceneho zobrazenia je  $f(x) = \sin x$  ... napr.  $K = 47$ .

**Priklad 1.2.** Dokazte, ze vo vektorovom priestore  $V$  nad polom  $F$  pre kazde vektory  $\alpha, \beta, \gamma \in V$ ,  $c \in F$  plati

$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma.$$

**Priklad 1.3.** Rozhodnite a dokazte, ci mnozina

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 4x_3 = 1\}$$

tvori vektorovy podpriestor priestoru  $\mathbb{R}^3$ .

**Priklad 1.4.** Zistite, ci su nasledujuce funkcie linearne zavisle vo vektorovom priestore vsetkych funkcii z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$

$$1, x + a, x^2 + bx + c$$

kde  $a, b, c$  su lubovolne realne cisla.

**Příklad 1.5.** *Vypočítajte  $a + b$ ,  $a \cdot b$ ,  $\frac{a}{b}$  pre komplexne čísla*

$$a = -1 + 2i$$

$$b = 2 - i$$

*Určte veľkosť a uhol komplexných čísel  $a, b$ , nájdite ich komplexne združené čísla a všetky 4 nakreslite do gaussovej roviny.*

## 2 Mala komplexna vsuvka

Je mozne, ze na prednaske ste mali Eulerovu formulu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Eulerov dokaz vyuzival nekonecne sumy, ale formula sa do dokazat aj ovela jednoduchsie ... staci vediet trochu derivovat. Vopred vsak upozornujeme, ze dokaz je prudko umely a je v style "ked uz vieme, co nam ma vyjst, tak to vieme zahrat tak, aby nam to vyslo". iste sklamanie je preto uplne normalne ... Eulerov dokaz je ovela krajisi :)

no, ale k dokazu. definujme si funkciu  $f$  z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{C}$

$$f(x) = (\cos x - i \sin x)e^{ix}.$$

zderivujme teraz tuto funkciu podla  $x$ :

$$f'(x) = (-\sin x - i \cos x)e^{ix} + (\cos x - i \sin x)e^{ix}i$$

a upracme je trochu

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-\sin x - i \cos x)e^{ix} + (i \cos x - i^2 \sin x)e^{ix} = \\ &= (-\sin x - i \cos x + i \cos x + \sin x)e^{ix} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teda derivacia  $f$  podla  $x$  je 0, co znamena, ze  $f$  je konstantna funkcia ...  $f(x) = c$  pre vsetky  $x \in \mathbb{R}$  pricom  $c$  je nejake, vo vseobecnosti komplexne cislo. Cislo  $c$  najdeme dosadenim nejakej hodnoty  $x$  do  $f$  .. najjednoduchsie vyzera  $x = 0$ .

$$f(0) = 1$$

Takze sme dostali, ze  $f(x) = 1$ . Presnejšie

$$(\cos x - i \sin x)e^{ix} = 1.$$

Teraz uz staci iba obe strany vynasobit s  $(\cos x + i \sin x)$  a dostaneme

$$(\cos^2 x - i^2 \sin^2 x)e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

co je

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

a teda

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Pozor, tento dokaz preskakuje mnoho detailov z analyzy komplexnych funkcii, ktoru najskor aj tak nikto z vas mat nebude ... kazdopadne je to aspon ako take zdovodnenie, preco by mala E. formula platit :)

Pisem to tu, lebo tato formula je velmi sikovna vec. Pozrime sa napr. na toto

$$e^{(a+b)i} = e^{ai+bi} = e^{ai}e^{bi}$$

Lava strana sa podle E. formuly rovna

$$\cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

zatiaľčo prava je (opat podľa E. formuly)

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

co mozeme roznasobit a upravit takto

$$\begin{aligned}(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) &= \cos a \cos b + i^2 \sin a \sin b + i \sin a \cos b + i \sin b \cos a = \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a)\end{aligned}$$

Teda, ked sa vratime spat k prvej rovnici, mozeme pisat

$$\cos(a+b) + i \sin(a+b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a).$$

Ked porovname realne a komplexne casti lavej a pravej strany tejto rovnosti, dostavame

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Zaujimave, ze? Podobnym sposobom vieme ukazat, preco

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

To ale nie je vsetko. Vedeli by sme napisat, comu sa rovna  $(\sin a + \sin b)$ ?  
Skusme pouzít, co uz mame

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

Ked si zvolíme  $\alpha, \beta$  takto (aby sme na lavej strane mali  $\sin a + \sin b \dots$  co sme povodne chceli)

$$\alpha + \beta = a$$

$$\alpha - \beta = b$$

potom

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a + b}{2} \\ \beta &= \frac{a - b}{2}\end{aligned}$$

a nakoniec

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}.$$

Podobnym sposobom vieme zdovodnit, preco

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a - b}{2} \cos \frac{a + b}{2}.$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}.$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}.$$

Este by sme sa mohli pytat na kombinovane sučty typu  $(\sin a + \cos b)$ . S týmto nam už E. formula nepomože. Preto? V E. formule totiž kosinus stojí pri realnej časti a sinus pri imaginárnej časti. Ale komplexne číslo  $a + bi$

nevieme "sklbit" do jedneho cisla, lebo  $i$  sa neda vyjadrit pomocou realnych cisel a rovnako realna cast sa neda napisat cez  $i$  ... realne a komplexne casti sa nemiesaju. Vsimnite si, ze sme vzdy scitavali sinusi so sinusmi a kosinusi s kosinusmi.

Sice sa E. formula uz pouzit neda, v jednom specialnom pripade si vsak vieme pomoct aj bez nej ... vieme zratat  $(\sin a + \cos a)$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

ak najdeme take  $b$ , ze  $\cos b = \sin b$ , potom mozeme pisat

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin b} = \sin a + \cos a.$$

Take  $b$  samozrejme existuje a najmensie je  $\frac{\pi}{4}$ . Potom  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Preto

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$$

Podobne sa da ukazat

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$$

### 3 Mala kulturna vsuvka

Skuste prosim odpovedat samostatne na nasledujuce dve otazky najlesie ako viete. Nehladajte nic na internete ani inde, pouzite len to co viete :) Ale nestrata s tymto viac nez 10 minut ... moze sa stat ze poznate spravnu odpoved ale asi skor nie (ja napr vobec netusim) ... jednoducho si tipnite najlesie ako viete.

**Uloha 3.1.** *Skuste odhadnut priamu vzdialenosť (v metroch) medzi vchodovymi dverami do skoly (fotobunka) a copy centrom na konci dlhej chodby.*

**Uloha 3.2.** *Skuste odhadnut hmotnosť Zeme v kilogramoch.*

Testujem davovu inteligenciu ... akurat potrebujem, aby jednotlivci v dave odpovedali nezavisle a neovplyvnovali sa.

Vdaka ;)