1 Tretia uloha

Priklad 1.1. *Zistite, ci mnozina M vsetkych ohranicenych zobrazeni z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ tvori vektorovy priestor nad polom $\mathbb{R}$, pricom scitanie zobrazeni ako aj nasobenie konstantou je bod po bode*

$$\begin{aligned} f, g \in M, \quad c \in \mathbb{R} \\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (c.f)(x) = c.f(x) \end{aligned}$$

Pripominame, ze $+$ pripadne $.$ na lavej strane posobi na samotne zobrazenia ... teda $(f+g)$ a $c.f$ su nove zobrazenia (z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$), ktore sme definovali tak, ako je to uvedene na pravej strane (tam uz $+$ a $.$ posobia na realne cisla, lebo $f(x)$ aj $g(x)$ su uz nejake realne hodnoty).

Zobrazenie f je ohranicene, ak existuje kladne realne cislo K take, ze pre vsetky x plati $|f(x)| < K$. Prikladom ohraniceneho zobrazenia je $f(x) = \sin x$ ... napr. $K = 47$.

Priklad 1.2. *Dokazte, ze vo vektorovom priestore V nad polom F pre kazde vektory $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in F$ plati*

$$\gamma - (\alpha + \beta) = (\gamma - \alpha) - \beta.$$

Priklad 1.3. *Rozhodnite a dokazte, ci mnozina*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 = -x_2 = x_3\}$$

tvori vektorovy podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$.

Priklad 1.4. *Zistite, ci su nasledujuce funkcie linearne zavisle vo vektorovom priestore vsetkych funkcii z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$*

$$1, \; x + a, \; x^2 + bx + c$$

kde a, b, c su lubovolne realne cisla.

Priklad 1.5. *Vypocitajte* $a + b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ *pre komplexne cisla*

$$a = -1 + 2i$$
$$b = 2 - i$$

Urcte velkost a uhol komplexnych cisel a, b, *najdite ich komplexne zdruzene cisla a vsetky 4 nakreslite do gaussovej roviny.*

2 Mala komplexna vsuvka

Je mozne, ze na prednaske ste mali Eulerovu formulu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Eulerov dokaz vyuzival nekonecne sumy, ale formula sa do dokazat aj ovela jednoduchsie ... staci vediet trochu derivovat. Vopred vsak upozornujeme, ze dokaz je prudko umely a je v style "‘ked uz vieme, co nam ma vyjst, tak to vieme zahrat tak, aby nam to vyslo"’. iste sklamanie je preto uplne normalne ... Eulerov dokaz je ovela krajsi :)

no, ale k dokazu. definujme si funkciu f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$

$$f(x) = (\cos x - i \sin x)e^{ix}.$$

zderivujme teraz tuto funkciu podla x:

$$f'(x) = (-\sin x - i \cos x)e^{ix} + (\cos x - i \sin x)e^{ix} i$$

a upracme je trochu

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-\sin x - i \cos x)e^{ix} + (i \cos x - i^2 \sin x)e^{ix} = \\ &= (-\sin x - i \cos x + i \cos x + \sin x)e^{ix} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teda derivacia f podla x je 0, co znamena, ze f je konstantna funkcia ... $f(x) = c$ pre vsetky $x \in \mathbb{R}$ pricom c je nejake, vo vseobecnosti komplexne cislo. Cislo c najdeme dosadenim nejakej hodnoty x do f .. najjednoduchsie vyzera $x = 0$.

$$f(0) = 1$$

Takze sme dostali, ze $f(x) = 1$. Presnejsie

$$(\cos x - i \sin x)e^{ix} = 1.$$

Teraz uz staci iba obe strany vynasobit s $(\cos x + i \sin x)$ a dostaneme

$$(\cos^2 x - i^2 \sin^2 x)e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

co je

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

a teda

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Pozor, tento dokaz preskakuje mnoho detailov z analyzy komplexnych funkcii, ktoru najskor aj tak nikto z vas mat nebude ... kazdopadne je to aspon ako take zdovodnenie, preco by mala E. formula platit :)

Pisem to tu, lebo tato formula je velmi sikovna vec. Pozrime sa napr. na toto

$$e^{(a+b)i} = e^{ai+bi} = e^{ai}e^{bi}$$

Lava strana sa podle E. formuly rovna

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

zatialco prava je (opat podla E. formuly)

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

co mozeme roznasobit a upravit takto

$$\begin{aligned}(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) &= \cos a \cos b + i^2 \sin a \sin b + i \sin a \cos b + i \sin b \cos a = \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a)\end{aligned}$$

Teda, ked sa vratime spat k prvej rovnici, mozeme pisat

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a).$$

Ked porovname realne a komplexne casti lavej a pravej strany tejto rovnosti, dostavame

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Zaujimave, ze? Podobnym sposobom vieme ukazat, preco

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

To ale nie je vsetko. Vedeli by sme napisat, comu sa rovna $(\sin a + \sin b)$? Skusme pouzit, co uz mame

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos\beta$$

Ked si zvolime α, β takto (aby sme na lavej strane mali $\sin a + \sin b$ ... co sme povodne chceli)

$$\alpha + \beta = a$$
$$\alpha - \beta = b$$

potom

$$\alpha = \frac{a+b}{2}$$
$$\beta = \frac{a-b}{2}$$

a nakoniec

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

Podobnym sposobom vieme zdovodnit, preco

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

Este by sme sa mohli pytat na kombinovane sucty typu $(\sin a + \cos b)$. S tymto nam uz E. formula nepomoze. Preco? V E. formule totiz kosinus stoji pri realnej casti a sinus pri imaginarnej casti. Ale komplexne cislo $a + bi$

nevieme "'sklbit"' do jedneho cisla, lebo i sa neda vyjadrit pomocou realnych cisel a rovnako realna cast sa neda napisat cez i ... realne a komplexne casti sa nemiesaju. Vsimnite si, ze sme vzdy scitavali sinusi so sinusmi a kosinusi s kosinusmi.

Sice sa E. formula uz pouzit neda, v jednom specialnom pripade si vsak vieme pomoct aj bez nej ... vieme zratat $(\sin a + \cos a)$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

ak najdeme take b, ze $\cos b = \sin b$, potom mozeme pisat

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin b} = \sin a + \cos a.$$

Take b samozrejme existuje a najmensie je $\frac{\pi}{4}$. Potom $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Preto

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin(a + \frac{\pi}{4}).$$

Podobne sa da ukazat

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2}\sin(a - \frac{\pi}{4}).$$

3 Mala kulturna vsuvka

Skuste prosim odpovedat samostatne na nasledujuce dve otazky najlepsie ako viete. Nehladajte nic na internete ani inde, pouzite len to co viete :) Ale nestrate s tymto viac nez 10 minut ... moze sa stat ze poznate spravnu odpoved ale asi skor nie (ja napr vobec netusim) ... jednoducho si tipnite najlepsie ako viete.

Uloha 3.1. *Skuste odhadnut priamu vzdialenost (v metroch) medzi vchodovymi dverami do skoly (fotobunka) a copy centrom na konci dlhej chodby.*

Uloha 3.2. *Skuste odhadnut hmotnost Zeme v kilogramoch.*

Testujem davovu inteligenciu ... akurat potrebujem, aby jednotlivci v dave odpovedali nezavisle a neovplyvnovali sa.

Vdaka ;)