Priklad 0.1. *Napiste definiciu*

- *bazy a dimenzie*
- *linearneho zobrazenia a matice linearneho zobrazenia*
- *regularnej a inverznej matice*
- *redukovanej trojuholnikovej matice.*

Proof. kto mal menej ako 2 body, tak si to poriadne pozrite este raz. a kto mal 2, tak si to zopakujte aj tak :) □

Priklad 0.2. *Zistite ako zavisi hodnost matice A od parametra x, ak*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ x & x & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proof. matica sa dala lahko upravit na

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2-x \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a teda hodnost matice bude 2 ak $x = -2$, inak bude 3. □

Priklad 0.3. *Najdite maticu linearneho zobrazenia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ak*

$$\begin{aligned} \phi(-2,-1,0,1) &= (-2,-3,-6,-7) \\ \phi(1,2,1,1) &= (12,13,9,10) \\ \phi(2,3,1,2) &= (17,20,14,17) \\ \phi(-1,-3,2,2) &= (7,6,2,1). \end{aligned}$$

Proof. bolo treba si to akurat spravne zapisat do matice

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & | & -2 & -3 & -6 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & | & 12 & 13 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & | & 17 & 20 & 14 & 17 \\ -1 & -3 & 2 & 2 & | & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a nasledne upravit na vhodny tvar. matica hladaneho zobrazenia bola

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

□

Priklad 0.4. *Najdite inverznu maticu k matici*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Proof. opat len dobre zapisat a pocitat s celymi cislami

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -6 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 6 & -10 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Priklad 0.5. *Najdite vsetky riesenia daneho nehomogenneho systemu*

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 15 & 21 & 21 & | & 15 \\ 36 & 21 & 45 & 61 & 62 & | & 43 \\ 24 & 14 & 30 & 38 & 40 & | & 26 \\ 84 & 49 & 105 & 141 & 144 & | & 99 \end{pmatrix}.$$

Proof. najpr upravime maticu do troj. redukovaneho tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{12} & \frac{5}{4} & 0 & \frac{7}{8} & | & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

vidime, ze matica ma riesenie. najpr najdeme priestor rieseni homogenneho systemu

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{12} & \frac{5}{4} & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

parametrove stlpce su $2, 3, 5$ ... hladame teda 3 vektory. najpr si napiseme ich hodnoty na parametrovych "‘suradniciach"’

$$(\_\_\_, 1, 0, \_\_\_, 0)$$
$$(\_\_\_, 0, 1, \_\_\_, 0)$$
$$(\_\_\_, 0, 0, \_\_\_, 1)$$

a potom doplnime zostavajuce hodnoty.

ignorujuc druhe dva parametrove stlpce (lebo sme za prislusne premenne dosadili nuly) nam ostali rovnice

$$x_1 + \frac{7}{12} = 0$$
$$0 + x_4 = 0$$

a teda prvy hladany vektor bude

$$(\frac{-7}{12}, 1, 0, 0, 0).$$

teraz si vsimame iba stredny parametrovy stlpec a dostaneme rovnice

$$x_1 + \frac{5}{4} = 0$$
$$0 + x_4 = 0$$

a mame druhy hladany vektor

$$(\frac{-5}{4}, 0, 1, 0, 0).$$

nakoniec posledny parametrovy stlpec

$$x_1 + \frac{7}{8} = 0$$
$$x_4 + \frac{1}{2} = 0$$

a posledny vektor

$$(\frac{-7}{8}, 0, 0, \frac{-1}{2}, 1).$$

cize priestor rieseni homogennej casti je

$$[(\frac{-7}{12}, 1, 0, 0, 0), (\frac{-5}{4}, 0, 1, 0, 0), (\frac{-7}{8}, 0, 0, \frac{-1}{2}, 1)]$$

este treba najst jedno partikularne riesenie nehomogenneho systemu ... najdeme ho tak, ze za parametre dosadime nuly ... ostanu nam rovnice

$$x_1 = \frac{-1}{2}$$
$$x_4 = 1$$

a teda riesenim je vektor

$$(\frac{-1}{2}, 0, 0, 1, 0).$$

riesenim nehomogennej sustavy su vektory z

$$\left(\frac{-1}{2}, 0, 0, 1, 0\right) + \left[(\frac{-7}{12}, 1, 0, 0, 0), (\frac{-5}{4}, 0, 1, 0, 0), (\frac{-7}{8}, 0, 0, \frac{-1}{2}, 1)\right]$$

$\square$

Priklad 0.6. *(Bonus 1) Nech A je matica $m \times n$ a B je matica $n \times k$ nad polom F. Dokazte, ze plati $h(AB) \leq h(A)$ a $h(AB) \leq h(B)$.*

Tiez dokazte, ze ak $m = n$ a A je regularna, potom plati $h(AB) = h(B)$.

Proof. najnazornejsie je to asi takto: na riadky matice A sa mozeme divat ako na mnozinu vektorov ... pricom $h(A)$ nam povie kolko z nich ich je linearne nezavislych. na maticu B sa zasa mozeme divat ako na maticu nejakeho linearneho zobrazenia.

potom $AB = C$ znamena, ze riadky C su obrazy vektorov z matice A.

o linearnom zobrazeni vieme (mali by sme vediet ... aspon tento semester pred skuskovym :) ze ak su dva vektory linearne zavisle, potom budu zavisle aj ich obrazy

$$\alpha = k\beta \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) = kf(\beta)$$

to znamena, ze linearne zobrazenie nespravi z linearne zavislych vektorov linearne nezavisle.

naopak to vsak neplati ... linearne zobrazenie moze z linearne nezavislych vektorov spravit linearne zavisle ... napr take zobrazenie, ktore zobrazi vsetko na nulovy vektor.

teda ze plati $h(AB) \leq h(A)$ potom vidno z toho, ze ak mala matica A p linearne nezavislych riadkov (vektorov) ... $h(A) = p$, potom matica AB ich nemoze mat viac ako p (ziadne nove LN vektory zobrazenie B nevyrobi).

druhu nerovnost vidno napr z definicie matice lin. zob. ... pre poriadok najpr ... matica B bude matica lin. zob. $f: V \to W$.

to ze v matici B su vlastne obrazy bazovych ϵ vektorov znamena, ze akykolvek vektor z V vieme napisat pomocou vektorov z ϵ bazy a ze jeho obraz vieme napisat pomocou obrazov tychto bazovych vektorov.

$$\alpha = c_1\epsilon_1 + ... + c_n\epsilon_n$$
$$f(\alpha) = c_1 f(\epsilon_1) + ... + c_n f(\epsilon_n)$$

dimenzia priestoru obrazov vsetkych vektorov ($f[V]$) potom zavisi prave na vektoroch $f(\epsilon_1), ..., f(\epsilon_n)$, teda na riadkoch matice B. preto ak A mala p linearne nezavislych riadkov ... $h(A) = p$, potom po ich zobrazeni maticou B ich zostane najviac tolko linearne nezavislych, aka je dimenzia priestoru $f[V]$, co je pocet LN vektorov $f\epsilon_1, ..., f\epsilon_n$, co je pocet LN riadkov matice B, co je $h(B)$.

nech $m = n$ a A je regularna. pouzijeme iny postup ... vieme, ze elementarne maticove operacie nemenia hodnost matice. tiez ste mali na ulohu, ze ku kazdej elmentarnej operacii prislucha nejaka konkretna stvorcova matica.

matica A je regularna, a teda vieme ju upravit na jednotkovu maticu ... to teda znamena, ze vieme nast take matice $P_1, ..., P_j$, ze

$$P_j P_{j-1} ... P_1 A = I$$

teda kazda matica P_i je vlastne nejaka elementarna operacia pricom najpr sme spravili upravu P_1 az nakoniec upravu P_j.

tiez ale plati, ze kazda elem. uprava ma k sebe inverznu elem. upravu ... a teda kazda matica P_i musi mat k sebe inverznu, aby platilo

$$P_i^{-1} P_i A = I$$

takze mozeme vyraz

$$P_j P_{j-1} ... P_1 A = I$$

postupne nasobit inverznymi P_i

$$A = P_1^{-1} ... P_{j-1}^{-1} P_j^{-1} I.$$

OK a teda sucin AB teraz mozeme napisat ako

$$AB = P_1^{-1} ... P_{j-1}^{-1} P_j^{-1} IB.$$

uz sme spomenuli, ze elem. upravy nemenia hodnost matice a preto

$$h(P_i A) = h(A)$$

takze

$$h(AB) = h(P_1^{-1} ... P_{j-1}^{-1} P_j^{-1} IB) = h(P_2^{-1} ... P_{j-1}^{-1} P_j^{-1} IB) = ... = h(IB) = h(B)$$

□

Priklad 0.7. *(Bonus 2) Nech vektory*

$$\alpha = (2, 3, 4)$$
$$\beta = (0, 3, 1)$$
$$\gamma = (2, 2, 3)$$

su bazou priestoru $\mathbb{Z}_5^3$. *Najdite vsetky take koeficienty* c_1, c_2, c_3, *ze*

$$(1, 3, 5) = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma.$$

Ako suvisi vase riesenie s tym, ze vektory tvoria bazu priestoru $\mathbb{Z}_5^3$*? (Hodnotena je spravnost tejto odpovede a nie riesenie systemu)*

Proof. mala nepozornost v zadani ... kedze pracujeme v $\mathbb{Z}_5$, mali by sme pisat vektor $(1, 3, 5)$ ako vaktor $1, 3, 0$. kedze vsak v $\mathbb{Z}_5$ $0 = 5$, je chyba len kozmetickeho razu.

no ale k rieseniu. upravit maticu do vhodneho tvaru nebolo tazke (POZOR, vektory vkladame po stlpcoch)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

a teda riesenim tohto systemu je

$$(3,3,0) + [(0,0,0)] = (3,3,0)$$

vyslo nam, ze riesenie je jedine. a to je dobre, lebo vektory α, β, γ tvoria bazu a baza ma taku vlastnost, ze dokaze vygenerovat kazdy vektor (z daneho VP) PRAVE JEDNYM sposobom ... presno to nam vyslo. □

Priklad 0.8. *(Bonus pre tych, ktory sa fakt nudia :) Dokazte, ze kazda stvorcova matica sa da napisat ako sucet symetrickej a antisymetrickej matice.*

Proof. jednoduche riesenie, ktore je vsak tazke si uvedomit.

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

zrejme $A + A^T$ je symetricka (lebo + je komutativne) a $A - A^T$ je antisymetricka

$$(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$$

□