1 niekolko poznamok ku ker_ϕ a im_ϕ

pred citanim je dobre si precitat (a pochopit) prislusnu cast v skriptach.

Definicia 1.1. *nech* $\phi : V(F) \to W(F)$ *je linearne zobrazenie. potom*

$$ker_\phi = \{\alpha \mid \alpha \in V(F) \ \wedge \ \phi(\alpha) = \mathbf{0}\} \quad (1)$$

$$im_\phi = \{\beta \mid \beta \in W(F) \ \wedge \ \exists \alpha \in V(F): \ \phi(\alpha) = \beta\}. \quad (2)$$

inak povedane, v jadre (*ker*) su vsetky vektory, ktore sa zobrazia na nulovy vektor a obraz (*im*) sa vlastne rovna $\phi[V(F)]$ ... teda obrazu celej mnoziny vektorov z $V(F)$ (nieco take sme mali aj na zaciatku semestra pri zobrazeniach).

Veta 1.1. *nech* $\phi : V(F) \to W(F)$ *je linearne zobrazenie. potom* ker_ϕ *je vektorovy podpriestor* $V(F)$ *a* im_ϕ *je vektorovy podpriestor* $W(F)$.

Veta 1.2. *nech* $\phi : V(F) \to W(F)$ *je linearne zobrazenie a nech priestor* $V(F)$ *ma konecnu dimenziu. potom*

$$dim(ker_\phi) \ + \ dim(im_\phi) = dim(V(F)) \quad (3)$$

Priklad 1.1. *nech*

$$\alpha = (2, 3, 4)$$
$$\beta = (0, 3, 1)$$
$$\gamma = (2, 2, 3)$$

su vektory z $V_3(\mathbb{Z}_5)$. *chceme najst take linearne zobrazenie*

$$\phi \ : \ V_3(\mathbb{Z}_5) \to V_3(\mathbb{Z}_5)$$

aby platilo

$$ker_\phi = [\alpha, \ \beta]$$
$$im_\phi = [\gamma].$$

Proof. zo zadania vieme hned povedat, ze

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lahko tiez vidno, ze vektory $(2,3,4)$ a $(0,2,3)$ su linearne nezavisle. preto, aby sme vedeli najst maticu linearneho zobrazenia, potrebujeme k nim pridat este jeden vektor χ tak, aby vsetky tri spolu generovali $V_3(\mathbb{Z}_5)$. zrejme najjednoduchsia volba bude $\chi = (0,0,1)$.

ako urcime, kde sa ma vektor χ zobrazit?

z horeuvedenej definicie im_ϕ a zo zadania prikladu je jasne, ze

$$\phi([\alpha, \beta, \chi]) = [\gamma]$$

... vektory α, β, χ generuju cely priestor $V_3(\mathbb{Z}_3)$ a $im_\phi = [\gamma]$. ale α aj β sa zobrazia na nulovy vektor a teda v skutocnosti $\phi([\chi]) = [\gamma]$.

to ale znamena, ze χ sa musi zobrazit niekde do priestoru $[\gamma]$ a zaroven sa nemoze zobrazit na nulovy vektor (inak by $im_\phi = [\mathbf{0}] \neq [\gamma]$). najjednoduchsia volba je $\phi(\chi) = \gamma$.

teda mozeme pisat

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a nasledne treba tuto maticu vhodne doupravovat. nakoniec

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

vsimnite si, ze riadky matice zobrazenia ϕ generuju vektorovy priestor im_ϕ.

na zaver, toto zobrezenie nie je jedine, ktore splna podmienky zo zadania. kludne by sme napriklad mohli volit obraz vektora χ ako nejaky nasobok vektora γ. nasou ulohou vsak bolo najst nejake jedno zobrazenie s pozadovanymi vlastnostami a to sme urobili. $\square$

Priklad 1.2. *nech* α, β, γ *su vektory z predosleho prikladu a nech* $\delta = (0,1,1)$. *hladajme take zobrazenie* $\phi : V_3(\mathbb{Z}_5) \to V_3(\mathbb{Z}_5)$ *aby platilo*

$$ker_\phi = [\alpha,\ \beta]$$
$$im_\phi = [\gamma,\ \delta]$$

Proof. podla postupu predosleho prikladu by sme skonstatovali, ze vektory $\alpha,\ \beta$ su linearne nezavisle, a teda potrebujeme este jeden vektor, ktory spolu s nimi bude generovat cely priestor $V_3(\mathbb{Z}_3)$. taky vektor sme nasli ... bol to vektor $\chi = (0,0,1)$.

dalej sme uvazovali, kam sa ma tento vektor zobrazit ... ma sa zobrazit tak, aby jeho obraz generoval cely im_ϕ (jeho obraz musi sam generovat cele im, lebo vektory $\alpha,\ \beta$ sa zobrazia na nulovy, a teda nebudu generovat nic okrem nuloveho vektora).

lahko vidno ale, ze vektory γ a δ, ktore maju generovat im_ϕ v tomto priklade, su linerane nezavisle. co to znamena pre nas vektor χ, kam sa teda ma zobrazit? ... jeho obraz $\phi(\chi)$, co je ale iba jeden vektor, ma generovat dvojrozmerny priestor ... to sa neda.

teda zobrazenie s pozadovanymi vlastnostami neexistuje.

tiez si vsimnite ako sa da pouzit *veta* 1.2. dimenzia $V_3(\mathbb{Z}_3)$ je zrejme 3 a tiez je jasne, ze dimenzia jadra aj obrazu je 2. ale $2 + 2 = 4 \neq 3$ a teda hladane zobrazenie nemoze existovat.

□

Priklad 1.3. *chceme najst take linerane zobrazenie* $\phi : V_4(\mathbb{Z}_7) \to V_4(\mathbb{Z}_7)$ *aby*

$$ker_\phi = [(3,2,1,4),\ (2,3,5,1)]$$
$$im_\phi = [(2,4,6,1),\ (3,5,1,2)].$$

dalej chceme aby platilo

$$\phi(3,3,5,1) = (5,2,0,3).$$

Proof. predtym nez zacneme hladat taketo zobrazenie, mozeme sa trochu pozriet na vektory zo zadania. ma platit $\phi(3,3,5,1) = (5,2,0,3)$, a teda vektor $(5, 2, 0, 3)$ musi byt linearna kombinacia vektorov generujucich obraz im_ϕ. to plati, lebo

$$(2, 4, 6, 1) \ + \ (3, 5, 1, 2) = (5, 2, 0, 3).$$

keby toto neplatilo, zadanie by od nas vlastne chcelo, aby sme hladali take zobrazenie, ktore by vsetky vektory zobrazilo do nejakeho daneho priestoru im_ϕ a zaroven by nam hned dalo aj vektor, ktory sa tam zobrazit nema ... zrejme taketo zadanie by nemalo riesenie.

dalej si vsimnime, ze dimenzia definicneho oboru zobrazenia je 4. lahko sa overi, ze dimenzia jadra aj obrazu je 2, a teda ani *veta* 1.2 nam nestoji v ceste.

hladajme teda taketo zobrazenie. zo zadania mozeme pisat

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & | & 5 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vypoctom zistime, ze 3 vektory nalavo su linerane nezavisle

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a ze pridanim vektora $\chi = (0, 0, 1, 0)$ dostaneme bazu $V_4(\mathbb{Z}_7)$. jedinou otazkou zostava, kam sa ma tento vektor zobrazit.

ma sa zobrazit tak, aby jeho obraz $\phi(\chi)$ spolu s obrazom vektora $(3, 3, 5, 1)$ generovali cele im_ϕ. preco?

kedze vektory $(3, 2, 1, 4)$ a $(2, 3, 5, 1)$ sa zobrazia na $(0, 0, 0, 0)$, na nulovy vektor sa zobrazia aj vsetky ich linearne kombinacie (premyslite si to). to znamena, ze zvysne dva bazove vektory $(3, 3, 5, 1)$ a $(0, 0, 1, 0)$, presnejsie ich obrazy, generuju cele im_ϕ, lebo ak

$$\delta = c_1(3, 2, 1, 4) + c_2(2, 3, 5, 1) + c_3(3, 3, 5, 1) + c_4(0, 0, 1, 0)$$

(horne 4 vektory tvoria bazu priestoru $V_4(\mathbb{Z}_7)$, a preto kazdy vektor mozeme pisat ako ich kombinaciu) potom

$$\begin{aligned}\phi(\delta) &= c_1\phi(3,2,1,4) + c_2\phi(2,3,5,1) + c_3\phi(3,3,5,1) + c_4\phi(0,0,1,0) = \\ &= c_1(0,0,0,0) + c_2(0,0,0,0) + c_3\phi(3,3,5,1) + c_4\phi(0,0,1,0) = \\ &= c_3\phi(3,3,5,1) + c_4\phi(0,0,1,0).\end{aligned}$$

obraz vektora $(3,3,5,1)$ pozname zo zadania, je to $(5,2,0,3)$. χ sa teda musi zobrazit na taky vektor $\phi(\chi)$ aby

$$im_\phi = [(2,4,6,1),\ (3,5,1,2)] = [(5,2,0,3),\ \phi(\chi)]$$

kedze $(5,2,0,3)$ nie je nasobkom ani jedneho z vektorov $(2,4,6,1),\ (3,5,1,2)$, $\phi(\chi)$ moze byt napr lubovolny z nich (premyslite si to).

samozrejme, $\phi(\chi)$ moze byt aj lubovolna ina kombinacia vektorov $(2,4,6,1),\ (3,5,1,2)$ dokym pre $\phi(\chi)$ plati, ze

$$[(2,4,6,1),\ (3,5,1,2)] = [(5,2,0,3),\ \phi(\chi)]$$

teda napriklad si to mozeme zvloit takto

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & | & 5 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

a doupravovat maticu na vhodny tvar.

premyslite si, preco by neexistovalo hladane zobrazenie ϕ, keby sme zmenili cast zadania na

$$im_\phi = [(2,4,6,1)]$$

mali by ste najst aspon dva dovody.

tiez si skuste premysliet, co by sa stalo, keby sme ako obraz vektora χ zvolili vektor $(5,2,0,3)$ ... skuste si najst maticu takehoto zobrazenia. malo by sa vam podarit najst opat aspon dva dovody, preco takato volba nie je dobra (nie nutne oba dovody vidno z matice zobrazenia :).

have fun :P $\square$