1 prvy priklad

Priklad 1.1. *Zistite, ktore z nasledujucich zapisov urcuju zobrazenia. Zdovodnite preco. urcte definicny obor a obor hodnot danych zobrazeni.*

$$\phi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \phi(x) = \sqrt{x}$$
$$\psi: \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ \psi(x) = 3x - 5$$

Priklad 1.2. *Zistite, ktore z nasledujucich zapisov urcuju zobrazenia. Zdovodnite preco. urcte definicny obor a obor hodnot danych zobrazeni.*

$$\phi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \phi(x) = x^2 - x$$
$$\psi: \ \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \ \psi(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

Priklad 1.3. *Zistite, ktore z nasledujucich zapisov urcuju zobrazenia. Zdovodnite preco. urcte definicny obor a obor hodnot danych zobrazeni.*

$$\phi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \phi(x) = \log x$$
$$\psi: \ \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ \psi(x) = \frac{1}{|x|}$$

Priklad 1.4. *Zistite, ktore z nasledujucich zapisov urcuju zobrazenia. Zdovodnite preco. urcte definicny obor a obor hodnot danych zobrazeni.*

$$\phi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \phi(x) = \sin x$$
$$\psi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \psi(x) = 3x - 5$$

Priklad 1.5. ***Zistite, ktore z nasledujucich zapisov urcuju zobrazenia. Zdovodnite preco. urcte definicny obor a obor hodnot danych zobrazeni.***

$$\phi: \ \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \ \phi(x) = (\sqrt{x})^2$$
$$\psi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{N}, \ \psi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

Proof. ϕ zobrazenim nie je, lebo -1 patri def. oboru (mnozine $\mathbb{Z}$) ale neexistuje ziadny prvok y z oboru hodnot (mnoziny $\mathbb{N}$) taky, ze $\phi(-1) = y$.

ψ zobrazenim je, lebo pre vsetky x z definicneho oboru (z mnoziny $\mathbb{R}$) existuje prave jeden prvok y z oboru hodnot (mnoziny $\mathbb{N}$) taky, ze $\psi(x) = y$.

uvedomte si, ze napriek tomu, ze $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pre vsetky realne cisla, a teda $\psi[\mathbb{R}] = \{1\}$, oborom hodnot zobrazenia ψ je cela mnozina $\mathbb{N}$.

$\square$

Priklad 1.6. *Zistite, ktore z nasledujucich zapisov urcuju zobrazenia. Zdovodnite preco. urcte definicny obor a obor hodnot danych zobrazeni.*

$$\phi: \ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ \phi(x) = \frac{x+1}{x-1}$$
$$\psi: \ \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \ \psi(x) = 3x - \pi$$

2 druhy priklad

Priklad 2.1. *Najdite zobrazenia $\phi \circ \psi$ a $\psi \circ \phi$, ak sa to da. Ak nie, uvedte preco.*

$$\phi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \phi(x) = 2x$$
$$\psi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \ \psi(x) = x^2$$

Priklad 2.2. *Najdite zobrazenia $\phi \circ \psi$ a $\psi \circ \phi$, ak sa to da. Ak nie, uvedte preco.*

$$\phi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \phi(x) = \sin x$$
$$\psi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \psi(x) = x^2$$

Priklad 2.3. ***Najdite zobrazenia $\phi \circ \psi$ a $\psi \circ \phi$, ak sa to da. Ak nie, uvedte preco.***

$$\phi: \ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ \phi(x) = x - 3$$
$$\psi: \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ \psi(x) = x^2$$

Proof. majuc dve zobrazenia ϕ, ψ, vieme vyrobit zlozene zobrazenie $\phi \circ \psi$ (resp. $\psi \circ \phi$) ak

$$H(\psi) = D(\phi) \qquad (\text{resp. } H(\phi) = D(\psi))\,.$$

tym nam vznikne zobrazenie $\phi \circ \psi: \ D(\psi) \to H(\phi)$ (resp. $\psi \circ \phi: \ D(\phi) \to H(\psi)$).

cize zobrazenia zo zadania prikladu sa zlozit nedaju, lebo $\mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$. $\square$

Priklad 2.4. *Najdite zobrazenia $\phi \circ \psi$ a $\psi \circ \phi$, ak sa to da. Ak nie, uvedte preco.*

$$\begin{aligned} \phi:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \phi(x) = x^2 - 1 \\ \psi:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \psi(x) = |x| \end{aligned}$$

Priklad 2.5. *Najdite zobrazenia $\phi \circ \psi$ a $\psi \circ \phi$, ak sa to da. Ak nie, uvedte preco.*

$$\begin{aligned} \phi:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \phi(x) = 2x + 4 \\ \psi:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \psi(x) = 3x + 1 \end{aligned}$$

Priklad 2.6. *Najdite zobrazenia $\phi \circ \psi$ a $\psi \circ \phi$, ak sa to da. Ak nie, uvedte preco.*

$$\begin{aligned} \phi:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \sqrt{x} \\ \psi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ \psi(x) = x^2 \end{aligned}$$

3 treti priklad

Priklad 3.1. *Dokazte. Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Plati aj opacna implikacia? Musi byt f surjekcia?*

Proof. majme teda zobrazenia

$$\begin{aligned} f:\ X \to Y \\ g:\ Y \to Z \\ g \circ f:\ X \to Z. \end{aligned}$$

to, ze $g \circ f$ je surjekcia znamena, ze

$$\forall z \in Z\ \exists x_0 \in X:\ g(f(x_0)) = z.$$

$f(x_0) \in Y$ lebo Y je obor hodnot zobrazenia f. to ale znamena, ze

$$\forall z \in Z\ \exists y_0 \in Y:\ g(y_0) = z \qquad \text{(kde } y_0 = f(x_0) \text{ z predoslej rovnice).}$$

a to nie je nic ine ako definicia surjektivnosti pre zobrazenie g.

plati aj opacna implikacia, ze ked je g surjektivne, potom aj $g \circ f$ je surjektivne? co by sa stalo, keby sme mali take mnoziny a zobrazenie f, ze

$$|X| = |Y| = |Z| = 47$$
$$f:\ X \to Y:\quad \forall x \in X\ f(x) = y_0.$$

teda, ze vsetky prvky $x \in X$ sa zobrazia na nejaky jeden prvok z Y. potom, moze byt zobrazenie g cim len chce (surjekcia no hoc aj bijekcia), vzdy bude platit, ze

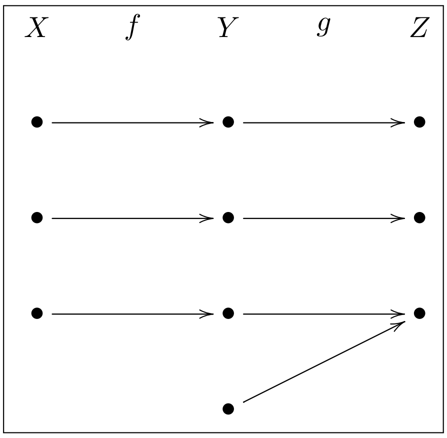
$$\forall x \in X\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y_0) = z_0.$$

inymi slovami, vsetky prvky mnoziny X sa v zobrazeni $g \circ f$ zobrazia na jeden jediny prvok z mnoziny Z (teraz sme ho hore oznacili z_0). ale mnozina Z ma 47 prvkov (taku sme si zobrali ale je snad jasne, ze ten pocet moze byt hocijaky, ak je vacsi ako 1). cele to znamena, ze $g \circ f$ nemoze byt surjekcia, ak je zobrazenie f takto skarede ... zobrazenie g to uz nijak nezachrani.

teraz by sme mohli dostat podozrenie, ze aj f aj g musi byt surjekcia, aby $g \circ f$ bola surjekcia ... teda vlastne g uz nemusime uvazovat, kedze sme o kusok hore ukazali, ze

$$g \text{ NIE je SUR} \Rightarrow g \circ f \text{ NIE je SUR}.$$

vo vseobecnosti vsak f nemusi byt surjekcia, ako to vidno z obrazka.



□

Priklad 3.2. *Dokazte. Ak $g \circ f$ je injekcia, tak aj f je injekcia. Plati aj opacna implikacia? Musi byt g injekcia?*

Proof. majme zobrazenia

$$f: \ X \to Y$$
$$g: \ Y \to Z$$
$$g \circ f: \ X \to Z.$$

ak by f nebola injekcia, potom by platilo

$$\exists x_1, \ x_2 \in X: \ x_1 \neq x_2 \ \wedge \ f(x_1) = f(x_2).$$

nech uz by bolo zobrazenie g akekolvek (INJ, SUR, BIJ), bude pre $x_1, \ x_2$ z predoslej rovnice platit, ze

$$f(x_1) = f(x_2) = y_0 \in Y$$
$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_0) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$$

teda $g \circ f$ nemoze byt injekcia.

bude platit opacna implikacia, ktora by hovorila, ze ak je f INJ potom aj $g \circ f$ je INJ? no zrejme nie. staci si za g zobrat take zobrazenie, pre ktore plati

$$\forall y \in Y: \ g(y) = z_0$$

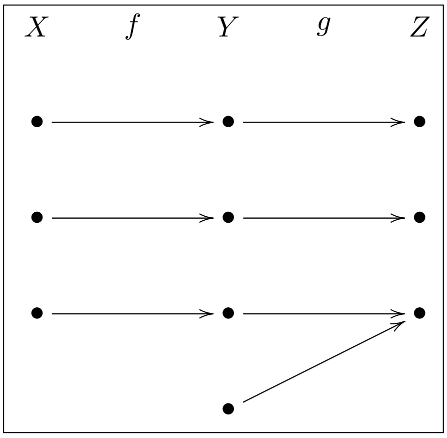
a take mnoziny X, Y, Z, ze

$$|X| = |Y| = |Z| = 47.$$

potom akekolvek $x \in X$ si zoberieme, vzdy v zobrazeni $g \circ f$ skonci v z_0 (lebo g posiela vsetko co mu "pride" od f do z_0 ... tak sme ho definovali). ale mnozinu X sme si zobrali taku, ze ma 47 prvkov, a teda $g \circ f$ nie je injekcia.

opat sa mozeme pytat, ci g musi byt tiez injekcia, aby aj $g \circ f$ bola injekcia (znova pripominame, ze o f sme to uz dokazali ... f naozaj musi byt injekcia, aby sme vobec mohli rozmyslat o tom, ci aj $g \circ f$ je injekcia).

ako vidno z obrazka, g byt injekcia nemusi.



$\square$

Priklad 3.3. *Nech A je konecna mnozina a $f : A \to A$ je zobrazenie. Dokazte, ze ak f je injekcia, tak f je aj surjekcia (a teda je bijekcia).*

Proof. f je INJ znamena, ze

$$\forall x_1,\ x_2 \in X :\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

to znamena, ze obraz mnoziny A v zobrazeni f ... $f[A]$ ... ma prave $|A|$ prvkov. nemoze mat menej, lebo by to porusilo vlastnost injektivnosti a tiez nemoze mat viac, lebo by to potom nebolo zobrazenie (z jedneho prvku A by v tom pripade museli vychadzat aspon dve sipky). je dufam nad vsetko zrejme, ze

$$f[A] \subseteq H(f) = A.$$

a kedze $|f[A]| = |A|$ (a A je konecna), potom uz musi platit, ze

$$f[A] = A.$$

f je surjektivne. $\square$

Priklad 3.4. *Nech A je konecna mnozina a $f : A \to A$ je zobrazenie. Dokazte, ze ak f je surjekcia, tak f je aj injekcia (a teda je bijekcia).*

Proof. f je SUR znamena

$$\forall a \in H(f) = A\ \exists a_0 \in D(f) = A :\ f(a_0) = a.$$

inymi slovami obraz definicneho oboru f je cely obor hodnot:

$$f[A] = A$$

keby sa dva rozne prvky zobrazili na ten isty (teda f by nebola INJ), potom by vam zostalo uz len $|A| - 2$ roznych prvkov v $D(f)$ a az $|A| - 1$ roznych prvkov v $H(f)$. co by bol dost velky problem.

trochu inak. ked mate n jablcok a n sipov, a do kazdeho jablcka chcete nejaky sip zapichnut, tak nemozete do jedneho jablcka zapichnut dva, lebo by vam potom uz nevyslo na vsetky. $\square$

4 stvrty priklad

Priklad 4.1. *Vypocitaj*

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najdi k ϕ inverznu permutaciu a urci ϕ^{120}.

Proof. najprv urcime ϕ. skladanie permutacii robime zprava, teda

$$1 \to 1 \to 2$$
$$2 \to 3 \to 1$$
$$3 \to 2 \to 3$$
$$4 \to 4 \to 4$$

zistili sme teda, ze

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

inverznu permutaciu urcime tak, ze najpr vymenime prvy a druhy riadok navzajom

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a nasledne "'stlpce"' upraceme podla prveho riadku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

zhodou okolnosti sme dostali, ze $\phi^{-1} = \phi$. toto vsak nie je pravidlo a vo vseobecnosti to budu rozne permutacie.

este chceme urcit ϕ^{120}. toto sa najlepsie spravi urcenim radu permutacie. rad permutacie nam vlastne hovori, pre ake najmensie n bude platit $\phi^n = id$, pricom id je identicka permutacia. skuste si premysliet, preco by take n malo vobec existovat :)

rad permutacie najdeme tak, ze si tuto permutaciu rozlozime na cykly. zaciatok si zoberieme cislo 1. teraz sa pozrieme na ake cislo sa 1 zobrazi pri permutacii ϕ.

$$1 \to 2$$

pokracujeme tym, ze sa pozrieme, kam sa zobrazi 2.

$$1 \to 2 \to 1$$

vidime, ze sme sa vratili na zaciatok, teda k cislu 1. nasli sme cyklus. ked spocitame pocet sipok, teda kolko prechodov sme urobili, urcime dlzku cyklu ... teda dlzka cyklu je pocet krokov, ktore v tomto cykle musime urobit, aby sme sa dostali tam, odkial sme zacali. v tomto pripade to je 2.

vidime, ze tento cyklus este nevycerpal vsetky prvky z permutacie, zoberieme si teda najmensi nepouzity ...3. a opat hladame cyklus.

$$3 \to 3$$

3 sa zobrazi na 3 ... koniec cyklu ... dlzka 1.

cislo 4 sa spravi rovnako.

cislom 4 sme vycerpali vsetky prvky permutacie ϕ. dostali sme spolu 3 cykly s dlzkami postupne 2,1,1. teraz chceme najst take najmensie cislo n, ze ked spravime n krokov na kazdom cykle, tak sa vzdy vratime na zaciatok. no, zrejme n musi byt nasobok 2, lebo pri prvom cykle treba dva kroky aby sme sa dostali na zaciatok. dalsie dva cykly davaju podmienku, ze n musi byt nasobok 1. dobry kandidat na cislo n je teda 2*1*1.

vo vseobecnosti vsak vynasobenie dlzok cyklov navzajom nemusi byt najmensi kandidat na cislo n ... premyslite si, ze najmensi spolocny nasobok dlzok vsetkych cyklov je nase hladane n ... teda $n = nsn(2, 1, 1) = 2$.

teraz, ked pozname rad permutacie ϕ, vieme ze $\phi^n = \phi^2 = id$. ked teda chceme vypocitat ϕ^{120}, staci napisat cislo 120 ako $120 = 2*a+b = 2*60+0$. z tohto potom vieme, ze

$$\phi^{120} = \phi^{2*60+0} = \phi^{2*60}\phi^0 = \left(\phi^2\right)^{60}\phi^0 = id^{60}id = id$$

vo vseobecnosti, ak rad ϕ je k a chceme vypocitat ϕ^l, potom ak $l = a*k+b$

$$\phi^l = \phi^{a*k+b} = \phi^{a*k}\phi^b = \left(\phi^k\right)^a\phi^b = id^a\phi^b = \phi^b$$

□

Priklad 4.2. *Vypocitaj*

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najdi k ϕ inverznu permutaciu a urci ϕ^{120}.

Priklad 4.3. *Vypocitaj*

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najdi k ϕ inverznu permutaciu a urci ϕ^{120}.

Priklad 4.4. *Vypocitaj*

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najdi k ϕ inverznu permutaciu a urci ϕ^{120}.

Priklad 4.5. *Vypocitaj*

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Najdi k ϕ inverznu permutaciu a urci ϕ^{120}.

Priklad 4.6. *Vypocitaj*

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najdi k ϕ inverznu permutaciu a urci ϕ^{120}.