1 prvy priklad

Priklad 1.1. *Zistite, ci*

$$M = \{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

je vektorovy priestor na polom $\mathbb{Q}$.

Proof. pri rieseni tohto prikladu pouzijeme sikovny trik. vsimnime si, ze $M \subseteq \mathbb{R}$. ako to mozeme pouzit? pri zistovani, ci M tvori VP treba overit niekolko podmnienok. zacnime s tym, ze $(M, +)$ musi byt komutativna grupa.

pretoze $M \subseteq \mathbb{R}$, operacia $+$ je automaticky asociativna aj komutativna na mnozine M (lebo je taka na celej mnozine $\mathbb{R}$).

dalej, mnozina M s operaciou $+$ a grupa $(\mathbb{R}, +)$ musia mat rovnake neutralne prvky ... pre neutralny prvok e_R grupy $(\mathbb{R}, +)$ urcite plati

$$\forall x \in M \subseteq \mathbb{R} : \quad x + e_R = x$$

teda e_R je aj neutralny prvok pre mnozinu M. keby mala mnozina M este nejaky iny neutralny prvok e_M, ten, kedze patri do M, patri aj do $\mathbb{R}$. plati:

$$a \in M \subseteq \mathbb{R} : \quad a + e_M = a = a + e_R \quad \Rightarrow \quad e_M = e_R.$$

Teda neutralny mnoziny M pre operaciu $+$ je ten isty ako pre grupu $(\mathbb{R}, +)$, co je prvok 0. zrejme, ten patri do M.

toto sa moze zdat ako dlhsia cesta nez ten prvok najst. treba si vsak uvedomit, ze toto je uzitocny postup ako vyuzit nieco, co vieme na dokaz niecoho, co nevieme:

1. $(\mathbb{R}, +)$ je grupa s neutralnym prvkom 0
2. M je podmnozina $\mathbb{R}$ s rovnakou operaciou $+$
3. dosledok: $+$ je na M asociativna, komutativna a ma rovnaky neutralny prvok 0
4. teraz sa lahko overi, ci 0 patri aj do M ... patri.

ostava overit, ci je mnozina M uzavreta na inverzne prvky. na zaklade podobnych uvah dojdeme k tomu, ze inverzne prvky su rovnake ako v $\mathbb{R}$.

treba vsak overit, ci je na ne mnozina M uzavreta: k prvku $a - b\sqrt{2}$ je inverzny prvok $-a - (-b)\sqrt{2}$

$$(a - b\sqrt{2}) + (-a - (-b)\sqrt{2}) = 0$$

lahko vidno, ze prvok $-a - (-b)\sqrt{2}$ patri do mnoziny M (ak a, b boli racionalne, potom aj $-a, -b$ budu racionalne cisla), a teda $(M, +)$ je naozaj komutativna grupa.

dalsie podmienky su:

$$\begin{aligned}
&a, b \in \mathbb{Q},\ \alpha, \beta \in M \\
&a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta \\
&(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha \\
&(ab)\alpha = a(b\alpha) \\
&1\alpha = \alpha
\end{aligned}$$

dokazeme vsetky tieto podmienky naraz. staci si uvedomit, ze pre $q \in \mathbb{Q},\ \alpha \in M$ platí $q\alpha \in M$ ... to je lahke vidiet. teraz pouzijeme, ze $M \subseteq \mathbb{R}$ a ze $(\mathbb{R}, +, .)$ je pole.

kedze vektory aj skalary su z pola $\mathbb{R}$, v tomto poli musia platit vsetky tieto podmienky ... uz sme si ukazovali, ze $\mathbb{R}$ je VP nad sebou samym (overte si to). na druhej strane, ako sme uz spomenuli, pre $q \in \mathbb{Q},\ \alpha \in M$ plati $q\alpha \in M$. z toho vyplyva, ze tieto podmienky platia aj v M.

este raz. najprv sme ukazali, ze rovnosti v tychto podmienkach platia v $\mathbb{R}$ a potom sme ukazali, ze prave aj lave strany tychto podmienok patria do mnoziny M ... z toho sme teda dostali, ze tieto rovnosti platia aj v mnozine $M \subseteq \mathbb{R}$ bez toho, aby sme to museli overovat rucne (premyslite si to).

teda mnozina M tvori VP. $\square$

Priklad 1.2. *Zistite, ci mnozina M vsetkych parnych zobrazeni z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ tvori vektorovy priestor nad polom $\mathbb{R}$, pricom scitanie zobrazeni ako aj nasobenie konstantou je bod po bode*

$$\begin{aligned}
f, g \in M, \quad c &\in \mathbb{R} \\
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
(c.f)(x) &= c.f(x)
\end{aligned}$$

Pripominame, ze + pripadne . na lavej strane posobi na samotne zobrazenia ... teda $(f+g)$ *a* $c.f$ *su nove zobrazenia (z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$*), ktore sme definovali tak, ako je to uvedene na pravej strane (tam uz + a . posobia na realne cisla, lebo* $f(x)$ *aj* $g(x)$ *su uz nejake realne hodnoty).*

Zobrazenie f *je parne, ak pre vsetky* x *plati* $f(x) = f(-x)$*. Prikladom parneho zobrazenia je napr.* $f(x) = x^2$*.*

Proof. mozeme overit podmienky z definicie vektoroveho priestoru, ale da sa pouzit aj takyto trik: vieme, ze vsetky zobrazenia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ tvoria vektorovy priestor nad polom $\mathbb{R}$. ak je mnozina parnych zobrazeni jeho podpriestorom, tak je zaroven aj vektorovym priestorom nad $\mathbb{R}$. overime teda, ze to je vektorovy podpriestor: zobrazenie $f(x) = 0$ je parne, takze mnozina M je neprazdna. lahko sa da overit, ze ked mame parne zobrazenia f a g a realne cislo c, tak aj $(f+g)$ a $c.f$ su parne zobrazenia. □

Priklad 1.3. *Zistite, ci mnozina* M *vsetkych neparnych zobrazeni z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$ *tvori vektorovy priestor nad polom* $\mathbb{R}$*, pricom scitanie zobrazeni ako aj nasobenie konstantou je bod po bode*

$$f, g \in M, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(c.f)(x) = c.f(x)$$

Pripominame, ze + pripadne . na lavej strane posobi na samotne zobrazenia ... teda $(f+g)$ *a* $c.f$ *su nove zobrazenia (z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$*), ktore sme definovali tak, ako je to uvedene na pravej strane (tam uz + a . posobia na realne cisla, lebo* $f(x)$ *aj* $g(x)$ *su uz nejake realne hodnoty).*

Zobrazenie f *je neparne, ak pre vsetky* x *plati* $f(-x) = -f(x)$*. Prikladom neparneho zobrazenia je napr.* $f(x) = x$*.*

Priklad 1.4. *Zistite, ci mnozina* M *vsetkych ohranicenych zobrazeni z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$ *tvori vektorovy priestor nad polom* $\mathbb{R}$*, pricom scitanie zobrazeni ako aj nasobenie konstantou je bod po bode*

$$f, g \in M, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(c.f)(x) = c.f(x)$$

Pripominame, ze + pripadne . na lavej strane posobi na samotne zobrazenia ... teda $(f+g)$ *a* $c.f$ *su nove zobrazenia (z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$*), ktore sme definovali* *tak, ako je to uvedene na pravej strane (tam uz + a . posobia na realne cisla, lebo $f(x)$ aj $g(x)$ su uz nejake realne hodnoty).*

Zobrazenie f je ohranicene, ak existuje kladne realne cislo K take, ze pre vsetky x plati $|f(x)| < K$. Prikladom ohraniceneho zobrazenia je $f(x) = \sin x$ ... napr. $K = 47$.

Priklad 1.5. *Zistite, ci mnozina M vsetkych konstantnych zobrazeni z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ tvori vektorovy priestor nad polom $\mathbb{R}$, pricom scitanie zobrazeni ako aj nasobenie konstantou je bod po bode*

$$f, g \in M, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(c.f)(x) = c.f(x)$$

Pripominame, ze + pripadne . na lavej strane posobi na samotne zobrazenia ... teda $(f + g)$ a $c.f$ su nove zobrazenia (z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$), ktore sme definovali tak, ako je to uvedene na pravej strane (tam uz + a . posobia na realne cisla, lebo $f(x)$ aj $g(x)$ su uz nejake realne hodnoty).

Zobrazenie f je konstantne, ak pre vsetky x plati $f(x) = c$, kde c je nejake pevne realne cislo.

Proof. standardny postup vid predosle priklady. dalo sa tu ale argumentovat aj inak (dalsi trik :)

konstantna funkcia f je dana nejakym realnym cislom c takym, ze

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = c.$$

teda tuto funkciu si mozeme oznacit ako f_c. zrejme pre kazde realne cislo c taka funkcia f_c existuje (a naopak pre kazdu konstantnu funkciu f_c existuje prave jedno realne cislo c take, ze $f_c(x) = c$).

dalej si treba vsimnut, ze scitovanie a nasobenie takychto funkcii sa sprava rovnako, ako sa spravaju realne cisla

$$f_c + f_d = f_{c+d}$$
$$f_c f_d = f_{cd}$$

a podobne analogie platia pre neutralne a inverzne prvky pre operacie + a

. na funkciach

$$
\begin{aligned}
f_0 + f_c &= f_{0+c} = f_c \\
f_{-c} + f_c &= f_{-c+c} = f_0 \\
f_1 f_c &= f_{1c} = f_c \\
f_{\frac{1}{c}} f_c &= f_1 \quad\quad c \neq 0
\end{aligned}
$$

... s trochou nepresnosti mozeme povedat, ze f_c je len inak napisane realne cislo c.

POZOR, f_c su vektory a teoria VP nehovori nic o nasobeni vektorov medzi sebou, ktore tu, zda sa, chceme pouzit. to je pravda. my vsak chceme tuto vektorovu predstavu obist. to, co horeuvedene rovnosti hovoria je, ze mnozina konstantnych realnych funkcii tvori pole ... OK, este by bolo treba overit ostatne podmienky pola ale je jasne, ze tiez platia ... a navyse take pole, ze je, az na mena prvkov, totozne s polom realnych cisel ... miesto realneho cisla c mame f_c, miesto + mame $f_c + f_d = f_{c+d}$ a miesto . mame $f_c f_d = f_{cd}$.

inak povedane, ked mame lubovolne dve realne cisla a, b a k nim zodpovedajuce funkcie f_a a f_b, tak ku realnemu cislu $a+b$ zodpovedajuca funkcia je f_{a+b} co je presne ta funkcia, ktoru dostaneme scitanim $f_a + f_b$. podobne ku sucinu $a.b$ zodpovedajuca funkcia f_{ab} je presne ta ista, aku dostaneme nasobenim $f_a f_b$.

teda struktura tychto dvoch poli je identicka vzhladom na operacie + a . v realnych cislach a + a . na funkciach. naozaj, tieto polia sa lisia iba menami svojich prvkov.

kedze $\mathbb{R}$ je VP nad $\mathbb{R}$, je aj mnozina konst. funkcii M VP nad sebou samou ... teraz LEN z toho dovodu, ze su to len inak pomenovane realne cisla ... keby sme prirodzene cisla zacali odteraz pisat dolu hlavou ale nijako nezmenili ich vyznam, nijak to nezmeni fakt, ze (napisane dolu hlavou) 2*3=6 :)

OPAT POZOR. nechceme tymto povedat, ze funkcia f_c a realne cislo c su jedno a to iste. to urcite nie ... realna funkcia a realne cislo su dve uplne rozdielne veci.

my chceme povedat, pre zopakovanie, ze vztah medzi realnymi cislami c a d vzhladom na operacie + a . je ten isty, ako vztah medzi funkciami f_c a f_d vzhladom na operacie + a . na funkciach ... "'struktura"' oboch mnozin je rovnaka vzhladom na tieto operacie.

ostava nam overit, ci je M aj VP nad $\mathbb{R}$. no a pretoze tiez plati, ze

$$df_c = f_{dc} = f_d f_c$$

..., ci nasobime funkciu f_c funkciou f_d alebo realnym cislom d je uplne jedno, vzdy dostaneme funkciu f_{cd}. toto potrebujeme pre tych par podmienok pre vektorove priestory, ktore sme mali overovat. my uz vieme, ze ked dosadime do tychto podmienok za vektory aj skalary nase funkcie, tak budu platit.

navyse sme poslednou rovnostou ukazali, ze ked zmenime skalary na realne cisla, tak sa nic nezmeni a podmienky budu platit nadalej.

vsimnite si ale, ze vektory na realne cisla zmenit NEMOZEME (teda vektorovy priestor $\mathbb{R}$ nad M nema zmysel), totiz nasobenim

$$f_d c = f_{cd}$$

ak by sme aj prehliadli zakernu otazku "'co znamena nasobit realne cislo funkciou?"', skoncili by sme na tom, ze taketo nasobenie dava ako vysledok funkciu ... teda skalar. vo vektorovom priestore ma ale platit, ze skalar*vektor=vektor.

toto boli trochu pokrocilejsie uvahy, ktore sa snazili jemne motivovat zmysel poli ... totiz mnoho na prvy pohlad roznych mnozin tvori ako pole identicku strukturu. potom ked nieco v tejto strukture plati pre jednu z nich, plati to pre vsetky bez toho, aby sme to museli pracne overovat.

takyto vztah medzi polom $(M, +, .)$ (resp VP $M(\mathbb{R})$) a polom $(\mathbb{R}, +, .)$ (resp VP $\mathbb{R}(\mathbb{R})$) sa nazyva izomorfizmom poli (resp izomorfizmom vektorovych priestorov), o ktorom budete pocut na prednaske a vyskytne sa este vela krat.

$\square$

Priklad 1.6. *Zistite, ci mnozina*

$$M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

s operaciami $+$ *a* $.$ *definovanymi*

$$\begin{aligned}(a, b),\ (c, d) &\in M, \quad r \in \mathbb{R}\\(a, b) + (c, d) &= (a + c + d, b + c - d)\\r.(a, b) &= (0, r.b)\end{aligned}$$

tvori vektorovy priestor nad polom $\mathbb{R}$*.*

Proof. nie je, dokonca neplati vela podmienok. najjednoduchsia je $1\alpha = \alpha$:

$$1(1, 1) = (0, 1) \neq (1, 1).$$

$\square$

2 Druhy priklad

Priklad 2.1. *Dokazte, ze vo vektorovom priestore V nad polom F pre kazde vektory $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in F$ plati*

$$c(\alpha - \beta) = c\alpha - c\beta.$$

Proof.

$$c(\alpha - \beta) = c(\alpha + (-\beta)) = c\alpha + c(-\beta)$$

ostava ukazat, ze

$$c(-\beta) = -c\beta$$

$$0 = c0 = c(\beta + (-\beta)) = c\beta + c(-\beta)$$

$$-c\beta = c(-\beta)$$

teda

$$c\alpha + c(-\beta) = c\alpha - c\beta$$

a sme hotovi. □

Priklad 2.2. *Dokazte, ze vo vektorovom priestore V nad polom F pre kazde vektory $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in F$ plati*

$$(c - d)\alpha = c\alpha - d\alpha.$$

Proof.

$$(c - d)\alpha = (c + (-d))\alpha = c\alpha + (-d)\alpha$$

ukazeme, ze

$$(-d)\alpha = -d\alpha$$

$$0 = 0\alpha = (d + (-d))\alpha = d\alpha + (-d)\alpha$$

$$-d\alpha = (-d)\alpha$$

a teda

$$c\alpha + (-d)\alpha = c\alpha - d\alpha$$

koniec. □

Priklad 2.3. *Dokazte, ze vo vektorovom priestore V nad polom F pre kazde vektory $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in F$ plati*

$$(-c)(-\alpha) = c\alpha.$$

Proof. vieme, ze plati $1\alpha = \alpha$, a teda musi tiez platit $-(1\alpha) = -\alpha$ (preco?). na druhej strane, v predoslej ulohe sme ukazali, ze $-(1\alpha) = (-1)\alpha$. preto

$$(-c)(-\alpha) = (-c)(-(1\alpha)) = (-c)((-1)\alpha)$$

dalej pouzijeme vlastnost VP ze $(ab)\alpha = a(b\alpha)$ a dostavame

$$(-c)((-1)\alpha) = ((-c)(-1))\alpha = c\alpha$$

ze plati $(-c)(-1) = c$ sme mali pri poliach. □

Priklad 2.4. *Dokazte, ze vo vektorovom priestore V nad polom F pre kazde vektory $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in F$ plati*

$$\gamma - (\alpha + \beta) = (\gamma - \alpha) - \beta.$$

Proof. sikovny postup od PK:

inverzny prvok k $\alpha + \beta$ je $-\alpha + (-\beta)$ (scitajte ich a dostanete 0) ale aj $-(\alpha + \beta)$ (najprv sa na vektor $\alpha + \beta$ divame ako sucet dvoch vektorov a potom ako na jeden vektor, ktory sa rovna suctu vektorov α a β). teda mozeme pisat

$$\gamma - (\alpha + \beta) = \gamma + (-(\alpha + \beta)) = \gamma + (-\alpha + (-\beta))$$

kedze $(V, +)$ je komutativna grupa, plati (s vyuzitim asociativity)

$$\gamma + (-\alpha + (-\beta)) = (\gamma - \alpha) - \beta.$$

□

Priklad 2.5. *Dokazte, ze vo vektorovom priestore V nad polom F pre kazde vektory $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in F$ plati*

$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma.$$

Proof. sikovny postup od MM:

$$\alpha - (\beta - \gamma) + (-\alpha) + (\beta - \gamma) = 0$$

k lavej strane sme pripocitali jej inverzny prvok. ale tiez plati

$$\alpha - \alpha + \beta - \beta + \gamma - \gamma = 0$$

potom

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 \\
\alpha - (\beta - \gamma) + (-\alpha) + \beta - \gamma &= \alpha - \alpha + \beta - \beta + \gamma - \gamma \quad / + \alpha, \quad - \beta, \quad + \gamma \\
\alpha - (\beta - \gamma) &= (\alpha - \beta) + \gamma.
\end{aligned}
$$

□

Priklad 2.6. *Dokazte, ze vo vektorovom priestore V nad polom F pre kazde vektory $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in F$ plati*

$$-(\alpha - \beta) = \beta - \alpha.$$

Proof. milion sposobov. napr:

$$-(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) = 0$$

pouzitim komutativnosti, asociativity a pripocitanim $-\alpha$ a β dostaneme

$$-(\alpha - \beta) = \beta - \alpha.$$

□

3 Treti priklad

Priklad 3.1. *Rozhodnite a dokazte, ci mnozina*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| = |x_2|\}$$

tvori vektorovy podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$.

Proof. M je zrejme neprazdna, lebo napr. $(1, -1, 0) \in M$ ako aj $(1, 1, 0) \in M$. patri tam ale aj ich sucet $(2, 0, 0)$? zrejme nie, takze to nie je VPP bodka. □

Priklad 3.2. *Rozhodnite a dokazte, ci mnozina*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x_1 - x_2 = 0\}$$

tvori vektorovy podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$.

Proof. M je neprazdna, patri tam napr nulovy vektor $(7 * 0 - 0 = 0)$. pre $c \in \mathbb{R}$ a $(x_1, x_2, x_3) \in M$ plati

$$c(x_1, x_2, x_3) \in M$$

lebo bud $c = 0$ a v tom pripade sme dostali nulovy vektor, o ktorom sme uz spomenuli, ze je v M. alebo $c \neq 0$ potom

$$7cx_1 - cx_2 = c(7x_1 - x_2) = c0 = 0.$$

pripominame, ze $7x_1 - x_2 = 0$ lebo $(x_1, x_2, x_3) \in M$ a teda musi splnat tuto podmienku (lebo tak sme mnozinu M zadali, ako mnozina vektorov, ktore splnaju tuto podmienku).

nech $(x_1, x_2, x_3),\ (y_1, y_2, y_3) \in M$ potom ich sucet je $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ a ma platit

$$7(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = 0$$

$$7(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (7x_1 - x_2) + (7y_1 - y_2) = 0 + 0$$

teda plati. teda M je VPP. □

Priklad 3.3. *Rozhodnite a dokazte, ci mnozina*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 4x_3 = 1\}$$

tvori vektorovy podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$.

Proof. rychly dokaz. v kazdom VPP je nulovy vektor ... VPP je neprazdna mnozina uzavreta na nasobenie hocakou konstantou z pola F (v tomto pripade $F = \mathbb{R}$) ... specialne teda aj na nasobenie 0. preto tam vzdy musi byt nulovy vektor, kedze 0 krat hocaky vektor je nulovy (overte si to).

no teda, aby sa ten kratky dokaz velmi nepredlzoval ... patri nulovy vektor do M? ... zrejme nie, lebo dostavame $0 + 0 = 1$.

M nie je VPP. $\square$

Priklad 3.4. *Rozhodnite a dokazte, ci mnozina*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 = -x_2 = x_3\}$$

tvori vektorovy podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$*.*

Proof. M je neprazdna, lebo tam patri nulovy vektor. nech $(x_1, x_2, x_3) \in M$ a $c \in \mathbb{R}$. zrejme, ked kazdu suradnicu vektora (x_1, x_2, x_3) vynasobime konstantou c, z rovnosti

$$2x_1 = -x_2 = x_3$$

dostaneme

$$c2x_1 = -cx_2 = cx_3$$

a tie samozrejme musia platit tiez (ak platia tie prve).

ak $(x_1, x_2, x_3),\ (y_1, y_2, y_3) \in M$ potom ich sucet je $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ a ma platit

$$2(x_1 + y_1) = -(x_2 + y_2) = x_3 + y_3.$$

to si mozeme rozpisat na normalne rovnice (s jednym =)

$$\begin{aligned} 2(x_1 + y_1) &= -(x_2 + y_2) \\ -(x_2 + y_2) &= x_3 + y_3 \end{aligned}$$

a upravit na

$$\begin{aligned} (2x_1 - x_2) + (2y_1 - y_2) &= 0 \\ (-x_2 - x_3) + (-y_2 - y_3) &= 0. \end{aligned}$$

tieto rovnosti platia, lebo $(x_1, x_2, x_3),\ (y_1, y_2, y_3) \in M$.

teda M je VPP. $\square$

Priklad 3.5. *Rozhodnite a dokazte, ci mnozina*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{x_1, x_2, x_3\} = 0\}$$

tvori vektorovy podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$.

Proof. $\max\{x_1, x_2, x_3\} = 0$ znamena, ze z trojice je jeden rovny nule a ostatni su mensi alebo rovni ako nula, teda napr $(0, 0, 0)$ alebo $(0, -1, -2)$.

vezmime si ten druhy spomenuty vektor a vynasobme ho -1. zrejme ten vynasobeny uz nebude v M. nie je to VPP. □

Priklad 3.6. *Rozhodnite a dokazte, ci mnozina*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \ \wedge \ x_1 - 2x_2 = 0\}$$

tvori vektorovy podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$.

Proof. teraz mame pre zmenu dve podmienky, meni to nieco? nie, stale sa musime pozriet ci je M neprazdna a overit zas a opat one dve podmienky. spravte si to.

iny trochu rychlejsi postup od MG. z druhej podmienky mame, ze $x_1 = 2x_2$. ked to dosadime do prvej podmienky, mame $x_3 = 5x_2$. teda vektory z M maju tvar $(5t, t, 2t)$ kde $t \in \mathbb{R}$. z tohto hned vidime, ze mnozina takychto vektorov je neprazdna, uzavreta na nasobenie skalarom aj na scitovanie dvoch vektorov (kto to nevidi, nech si to overi :)

koniec, je to VPP. □

4 Stvrty priklad

Priklad 4.1. *Zistite, ci su dane vektory linearne zavisle*

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 5)$$

v priestore $\mathbb{R}^3$.

Proof. existuju take $a, b, c \in \mathbb{R}$, ze nie su vsetky nulove a

$$a(1, 2, 3) + b(1, 3, 2) + c(2, 1, 5) = (0, 0, 0)?$$

upravime lavu stranu:

$$(a, 2a, 3a)+(b, 3b, 2b)+(2c, c, 5c) = (a+b+2c, 2a+3b+c, 3a+2b+5c) = (0, 0, 0)$$

ma teda platit

$$a + b + 2c = 0$$

$$2a + 3b + c = 0$$

$$3a + 2b + 5c = 0$$

z prvej rovnice mame $a = -b - 2c$. dosadime to do zvysnych dvoch:

$$2(-b - 2c) + 3b + c = b - 3c = 0$$

$$3(-b - 2c) + 2b + 5c = -b - c = 0$$

ich scitanim dostaneme $-4c = 0$, teda $c = 0$. z toho uz lahko vidime, ze aj $a = b = 0$. vektory su teda LN. $\square$

Priklad 4.2. *Zistite, ci su nasledujuce funkcie linearne zavisle vo vektorovom priestore vsetkych funkcii z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$

$$1,\ x + a,\ x^2 + bx + c$$

kde a, b, c *su lubovolne realne cisla.*

Priklad 4.3. *Zistite, ci su dane vektory linearne zavisle*

$$(1, 3, 4),\ (2, 1, 3),\ (3, 1, 4)$$

v priestore $\mathbb{Z}_5^3$.

Priklad 4.4. *Zistite, ci su nasledujuce funkcie linearne zavisle vo vektorovom priestore vsetkych funkcii z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$

$$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x.$$

Proof. existuju take $a, b, c \in \mathbb{R}$ ze nie su vsetky nulove a

$$a + b\cos x + c\cos 2x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}?$$

vezmime $x = \frac{\pi}{2}$

$$a + b\cos\frac{\pi}{2} + c\cos\frac{2\pi}{2} = a + 0 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c.$$

teraz nech $x = 0$

$$a + b\cos 0 + c\cos 0 = a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a - c = -2a.$$

nech $x = \pi$

$$a + b\cos\pi + c\cos 2\pi = a - b + c = 0.$$

po dosadeni za b a c dostaneme $a - (-2a) + a = 4a = 0$, teda $a = 0$. potom aj $b = c = 0$, teda $1, \cos x, \cos 2x$ su LN. □

Priklad 4.5. *Zistite, ci su dane vektory linearne zavisle*

$$(1, 3, 4), \ (2, 1, 3), \ (3, 1, 4)$$

v priestore $\mathbb{Z}_7^3$.

Priklad 4.6. *Zistite, ci su nasledujuce funkcie linearne zavisle vo vektorovom priestore vsetkych funkcii z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x.$$

Proof. existuju take $a, b, c \in \mathbb{R}$ ze nie su vsetky nulove a

$$a + b\sin x + c\cos x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}?$$

vezmime si $x = 0$

$$a + b\sin 0 + c\cos 0 = a + 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -c.$$

teraz nech $x = \frac{\pi}{2}$

$$a + b\sin\frac{\pi}{2} + c\cos\frac{\pi}{2} = a + b + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a.$$

nech $x = \pi$

$$a + b \sin \pi + c \cos \pi = a + 0 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c.$$

teda $a = c = -c$, a preto $c = 0$. potom aj $a = b = 0$ a funkcie $1, \sin x, \cos x$ su LN. $\square$

5 Piaty priklad

Priklad 5.1. *Vypocitajte* $a+b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ *pre komplexne cisla*

$$a = 1 + 3i$$
$$b = 3 + i$$

Urcte velkost a uhol komplexnych cisel a, b, *najdite ich komplexne zdruzene cisla a vsetky 4 nakreslite do gaussovej roviny.*

Priklad 5.2. *Vypocitajte* $a+b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ *pre komplexne cisla*

$$a = -1 + 2i$$
$$b = 2 - i$$

Urcte velkost a uhol komplexnych cisel a, b, *najdite ich komplexne zdruzene cisla a vsetky 4 nakreslite do gaussovej roviny.*

Priklad 5.3. *Vypocitajte* $a+b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ *pre komplexne cisla*

$$a = 2 - i$$
$$b = 4 + 5i$$

Urcte velkost a uhol komplexnych cisel a, b, *najdite ich komplexne zdruzene cisla a vsetky 4 nakreslite do gaussovej roviny.*

Priklad 5.4. *Vypocitajte* $a+b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ *pre komplexne cisla*

$$a = 2 - 5i$$
$$b = -1 - 4i$$

Urcte velkost a uhol komplexnych cisel a, b, *najdite ich komplexne zdruzene cisla a vsetky 4 nakreslite do gaussovej roviny.*

Priklad 5.5. *Vypocitajte* $a+b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ *pre komplexne cisla*

$$a = 3 + 5i$$
$$b = 2 + 2i$$

Urcte velkost a uhol komplexnych cisel a, b, *najdite ich komplexne zdruzene cisla a vsetky 4 nakreslite do gaussovej roviny.*

Priklad 5.6. *Vypocitajte* $a + b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ *pre komplexne cisla*

$$a = 5 - i$$
$$b = -4i$$

Urcte velkost a uhol komplexnych cisel a, b, *najdite ich komplexne zdruzene cisla a vsetky 4 nakreslite do gaussovej roviny.*