

Zobrazenia

16. septembra 2011

Množina

Množiny, s ktorými budeme pracovať: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}

Rovnosť množín: Množiny A a B sa rovnajú práve vtedy, keď

$$(x \in A) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in B).$$

Karteziánsky súčin

Definícia

Ak A , B sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) takých, že $a \in A$ a $b \in B$. Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Definícia funkcie

Zobrazenie z množiny X do množiny Y = predpis, ktorý každému prvku množiny X priradí jediný prvok množiny Y . Formálne:

Definícia

Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ z množiny X do množiny Y je podmnožina f množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ s vlastnosťou $(x, y) \in f$.

Množinu X budeme tiež nazývať *definičný obor* zobrazenia f a množina Y je *obor hodnôt* zobrazenia f .

Namiesto zápisu $(x, y) \in f$ budeme používať zápis $y = f(x)$.

Príklady zobrazení

Príklad

Uvedieme niekoľko príkladov zobrazení.

$$f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(n) = 2n + 1$$

$$f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_2(n) = 2n$$

$$f_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_3(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ n - 1, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin x$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2$$

Rovnosť zobrazení

Definícia

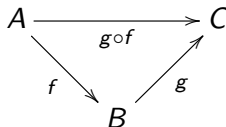
Hovoríme, že dve zobrazenia $f: X \rightarrow Y$ a $g: Z \rightarrow W$ sa *rovnajú*, ak $X = Z$, $Y = W$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in X$. (Inými slovami, ak sa rovnajú ich definičné obory, obory hodnôt a obe zobrazenia nadobúdajú v každom bode rovnakú hodnotu.) Rovnosť zobrazení označujeme $f = g$.

Skladanie zobrazení

Definícia (Skladanie zobrazení)

Ak $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení f a g* nazývame zobrazenie $g \circ f: X \rightarrow Z$ také, že pre každé $x \in X$ platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$



Skladanie zobrazení

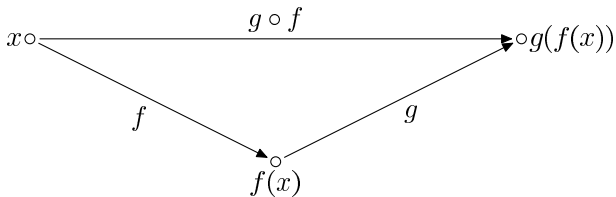


Figure: Skladanie zobrazení

Asociatívnoš' skladania zobrazení

Tvrdenie (Asociatívnoš' skladania zobrazení)

Nech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ sú zobrazenia, potom

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

Injekcia, surjekcia, bijekcia

Definícia

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je *injektívne (prosté) zobrazenie* (alebo tiež injekcia), ak pre všetky $x, y \in X$ také, že $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$.

Hovoríme, že f je *surjekcia (surjektívne zobrazenie, zobrazenie na)*, ak pre každé $y \in Y$ existuje také, $x \in X$, že $f(x) = y$.

Hovoríme, že f je *bijekcia (bijektívne zobrazenie)*, ak f je súčasne injekcia aj surjekcia.

Ekvivalentná definícia injekcie:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Injekcia, surjekcia, bijekcia

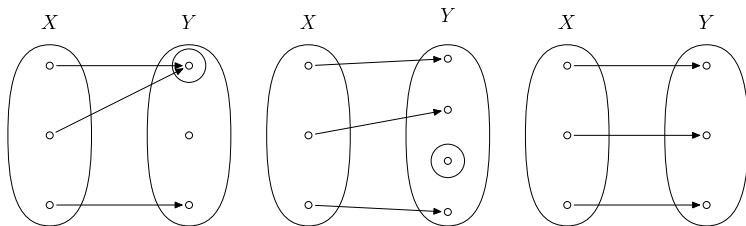


Figure: Ilustrácia injekcie, surjekcie a bijekcie

Injekcia, surjekcia, bijekcia

Tvrdenie

Zloženie dvoch injekcií je injekcia, zloženie dvoch surjekcií je surjekcia, zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.

Identita

Definícia

Zobrazenie $id_X: X \rightarrow X$ také, že $id_X(x) = x$ pre každé $x \in X$ sa nazýva *identické zobrazenie* (*identita*).

Pre $f: X \rightarrow Y$ platí

$$f \circ id_X = f \quad \text{a} \quad id_Y \circ f = f.$$

Inverzné zobrazenie

Definícia

Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$ sú zobrazenia. Ak platí

$$g \circ f = id_X$$

$$f \circ g = id_Y$$

tak hovoríme, že zobrazenie g je *inverzné zobrazenie k* f . Inverzné zobrazenie k zobrazeniu f označujeme f^{-1} .

$$g(f(x)) = x$$

$$f(g(y)) = y$$

Vlastnosti inverzného zobrazenia

Tvrdenie

Inverzné zobrazenie k f existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.

Tvrdenie

Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ sú bijekcie. Potom

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{-1} &= f \\ (g \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1}\end{aligned}$$

Dôsledok

Ak f je bijekcia, tak aj f^{-1} je bijekcia.

Permutácie

Definícia

Ak M je konečná množina, tak bijekciu $\varphi: M \rightarrow M$ budeme nazývať *permutáciou* množiny M .

$$M = \{1, 2, \dots, n\}$$

Zápis permutácií:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Skladanie permutácií

Pre $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, máme $\varphi\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \varphi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \varphi\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



Figure: Permutácie τ a φ

Skladanie permutácií

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n\text{-krát}}$$

Pre $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ máme

$$\varphi^1 = \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$