

# Lineárne zobrazenia a matice

7. novembra 2011

## Definícia matice

### Definícia

*Maticou* typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa  $F$ , ktorá má  $m$  riadkov a  $n$  stĺpcov.

Matice zapisujeme v tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

pričom  $a_{ij}$  označuje prvok v  $i$ -tom riadku a  $j$ -tom stĺpci.

Stručnejší zápis:  $A = ||a_{ij}||$

### Príklad

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$  je matica typu  $2 \times 3$  nad  $\mathbb{R}$ .

# Operácie s maticami

## Definícia

Nech  $A, B$  sú matice typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  a  $c \in F$ .

(a) *Súčet matic*  $A = \|\|a_{ij}\|\|$  a  $B = \|\|b_{ij}\|\|$  je matica

$$A + B = \|\|a_{ij} + b_{ij}\|\|.$$

(b) Matica  $c.A = \|\|ca_{ij}\|\|$  sa nazýva *c-násobok* matice  $A$ .

(Teda sčítovanie matic a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.)

## Veta

*Matice typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  s takto definovaným sčítovaním a násobením skalármi tvoria vektorový priestor nad poľom  $F$ .*

# Jednotková matica

## Definícia

Maticu typu  $n \times n$  (teda takú, ktorá má rovnaký počet riadkov a stĺpcov) nazývame *štvorcová matica*.

Maticu

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

typu  $n \times n$  nazývame *jednotková matica*.

Štvorcová matica, ktorá má mimo diagonály iba nuly (t.j.  $a_{ij} = 0$  pre  $i \neq j$ ) sa nazýva *diagonálna matica*.

# Transponovaná matica

## Definícia

*Transponovaná matica* k matici  $A$  typu  $m \times n$  je matica  $A^T$  typu  $n \times m$  určená ako

$$A^T = \|\|a_{ji}\|\|.$$

Štvorcová matica  $A$  sa nazýva *symetrická*, ak  $A = A^T$  a *antisymetrická*, ak  $A = -A^T$ .

$$I^T = I, (A^T)^T = A, (A + B)^T = A^T + B^T \text{ a } (cA)^T = cA^T$$

# Transponovaná matica

## Príklad

Ak  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ , tak  $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Matica  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  je symetrická, matica  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  je antisymetrická.

## Podpriestor prislúchajúci matici

### Definícia

Podpriestorom prislúchajúcim matici  $A$  typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  nazývame podpriestor priestoru  $F^n$  generovaný riadkami matice  $A$ . Označujeme ho  $V_A$ .

### Príklad

Nad poľom  $\mathbb{R}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad V_A = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V_I = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3$$

Vidíme, že jednotkovej matici  $I$  zodpovedá štandardná báza priestoru  $\mathbb{R}^3$ , preto jej prislúcha celý priestor  $\mathbb{R}^3$ .

## Riadková ekvivalencia matíc

### Definícia

*Elementárne riadkové operácie* na matici  $A$  nad poľom  $F$  sú:

1. výmena 2 riadkov matice,
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom  $c$  poľa  $F$ ,
3. pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Hovoríme, že matice  $A$  a  $B$  sú *riadkovo ekvivalentné* ak maticu  $B$  možno z  $A$  dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice  $A$  a  $B$  sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako  $A \sim B$ .



## Riadková ekvivalencia matíc

### Príklad

Nasledujúce matice sme dostali z prvej pomocou elementárnych riadkových operácií. Sú to teda riadkovo ekvivalentné matice.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podobne sa dajú definovať aj elementárne stĺpcové operácie.

### Poznámka

$$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

## Riadková ekvivalencia matic

### Veta

*Elementárne riadkové operácie nemenia podpriestor prislúchajúci danej matici. (Teda riadkovo ekvivalentným maticiam zodpovedá rovnaký podpriestor.)*

## Redukovaná trojuholníková matica

### Definícia

Matica  $A$  je *redukovaná trojuholníková matica*, ak:

- (i) Vedúci (= prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.
- (ii) Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.
- (iii) Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami.
- (iv) Vedúci prvok ľubovoľného nenulového riadku je napravo od vedúcich prvkov všetkých nenulových riadkov nad ním a naľavo od vedúcich prvkov riadkov pod ním (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Redukovaná trojuholníková matica

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## Redukovaná trojuholníková matica

### Veta

*Každá matica nad poľom  $F$  je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Nech  $A \neq 0$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1s} & * & * & * & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{ks} \neq 0 & * & * & * & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,s} & * & * & * & a_{m+1,n} \end{pmatrix}$$

## Redukovaná trojuholníková matica

Výmena riadkov:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1s} \neq 0 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

## Redukovaná trojuholníková matica

$b_{1s}^{-1}$ -násobok prvého riadku:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

## Redukovaná trojuholníková matica

Vynulujeme prvky v  $s$ -tom stĺpci:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2,s+1} & \dots & \dots & c_{2,n} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{k,s+1} & \dots & \dots & c_{k,n} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{m+1,s+1} & \dots & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$



## Redukovaná trojuholníková matica

Indukčný predpoklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Redukovaná trojuholníková matica

Vynulujeme príslušné prvky v prvom riadku:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Hodnosť matice

### Veta

*Nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé.*

### Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riadky:  $\vec{\alpha} = (1, 0, 2)$  a  $\vec{\beta} = (0, 1, \frac{3}{2})$ .

Rovnosť  $c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} = \vec{0}$  znamená

$c(1, 0, 2) + d(0, 1, \frac{3}{2}) = (c, d, 2c + \frac{3}{2}d) = (0, 0, 0)$ , z čoho dostaneme (porovnaním prvých 2 súradníc)  $c = 0$  a  $d = 0$ .

Vektory  $\vec{\alpha}$  a  $\vec{\beta}$  sú lineárne nezávislé.

## Hodnosť matice

### Definícia

*Hodnosť matice*  $A$  je dimenzia podpriestoru  $V_A$  prislúchajúceho tejto matici. Označujeme ju  $h(A)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_A = V_B$$

$$h(A) = h(B) = 2$$

## Riadková ekvivalencia a podpriestor $V_A$

### Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_A = V_B = \left[ \left(1, 0, 2\right), \left(0, 1, \frac{3}{2}\right) \right].$$

Otázka:  $\vec{\alpha} = (1, 4, 4) \in V_A?$

$$(1, 4, 4) = c_1(1, 0, 2) + c_2\left(0, 1, \frac{3}{2}\right) = \left(c_1, c_2, 2c_1 + \frac{3}{2}c_2\right).$$

Porovnaním prvých dvoch súradníc dostaneme  $c_1 = 1$  a  $c_2 = 4$ .  
Vektor na pravej strane poslednej rovnice má potom ale tretiu  
súradnicu rovnú  $2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 4 = 8 \neq 4$ , čiže vektor  $\vec{\alpha}$  nepatrí do  $V_A$ .

## Riadková ekvivalencia a podpriestor $V_A$

### Lema

*Nech  $A$  je redukovaná trojuholníková matica typu  $m \times n$  nad poľom  $F$ . Označme jej nenulové riadky  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$  a ako  $i_1, \dots, i_k$  označme čísla stĺpcov, v ktorých sú vedúce jednotky. Potom  $\vec{\alpha} = (c_1, \dots, c_n) \in V_A$  práve vtedy, keď*

$$\vec{\alpha} = c_{i_1} \vec{\alpha}_1 + c_{i_2} \vec{\alpha}_2 + \dots + c_{i_k} \vec{\alpha}_k.$$

## Riadková ekvivalencia a podpriestor $V_A$

### Veta

*Ak  $A$  a  $B$  sú redukované trojuholníkové matice rovnakého typu  $m \times n$  nad poľom  $F$  a  $V_A = V_B$ , tak  $A = B$ .*

## Riadková ekvivalencia a podpriestor $V_A$

### Príklad

Majme redukovanú trojuholníkovú maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ktorá má vedúce jednotky v prvom a treťom stĺpci.

Keby platilo  $V_A = V_B$  pre

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{25} \end{pmatrix}$$

tak  $(0, 0, 1, 1, 2) \in V_B$ , a teda

$(0, 0, 1, 1, 2) = 0 \cdot (1, b_{12}, b_{13}, 0, b_{15}) + 1 \cdot (0, 0, 0, 1, b_{25})$ , čiže

$(0, 0, 1, 1, 2) = (0, 0, 0, 1, b_{25})$ , spor.



## Riadková ekvivalencia a podpriestor $V_A$

### Dôsledok

*Nech  $A$  a  $B$  sú matice typu  $m \times n$  nad poľom  $F$ . Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:*

- (i)  $A$  a  $B$  sú riadkovo ekvivalentné,*
- (ii)  $V_A = V_B$ ,*
- (iii)  $A$  a  $B$  sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

## Hľadanie chyby v úpravách

Dokázané výsledky môžeme použiť na „polovičnú skúšky správnosti“ pri počítaní RTM.

Vieme však ľahko overiť, či  $V_A \subseteq V_B$ , ak  $B$  je RTM.

Ak nám takáto „poloskúška“ nevyjde vieme dokonca pomerne jednoducho nájsť poslednú úpravu od konca, v ktorej sme spravili chybu.

$$\text{Postup s chybou: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Definícia

### Definícia

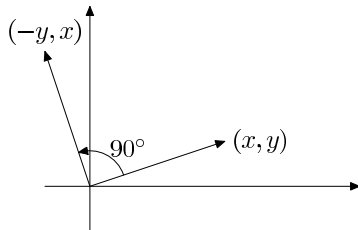
Ak  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je zobrazenie z  $V$  do  $W$ , tak hovoríme, že  $f$  je *lineárne zobrazenie*, ak pre ľubovoľné  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$  a ľubovoľné  $c \in F$  platí

- (i)  $f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$ ,
- (ii)  $f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha})$ .

## Príklady

### Príklad

Otočenie v rovine o  $90^\circ$  je lineárne zobrazenie.



$$f(x, y) = (y, -x)$$

## Príklady

### Príklad

Zobrazenie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  určené predpisom

$f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$  je lineárne zobrazenie.

## Ekvivalentná podmienka

### Veta

Nech  $V, W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (a) zobrazenie  $f$  je lineárne,
- (b)  $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$  pre ľubovoľné  $c, d \in F$  a ľubovoľné  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ ,
- (c)  $f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_nf(\vec{\alpha}_n)$  pre ľubovoľné  $c_1, \dots, c_n \in F, \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ .

## Vlastnosti lineárnych zobrazení

### Tvrdenie

Ak  $f$  je lineárne zobrazenie, tak  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ .

### Veta

Nech  $V, W$  sú vektorové priestory. Nech  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  je báza priestoru  $V$  a nech  $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$ . Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$  také, že

$$f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$$

pre  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## Matica lineárneho zobrazenia

Štandardná báza v  $F^n$ :

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{\varepsilon}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

### Definícia

Nech  $F$  je pole. *Matica lineárneho zobrazenia*  $f: F^m \rightarrow F^n$  je matica typu  $m \times n$  ktorej  $k$ -ty riadok je vektor  $f(\vec{\varepsilon}_k)$ .

Maticu zobrazenia  $f$  budeme označovať  $A_f$ .

Maticou typu  $m \times n$  je jednoznačne určené lineárne zobrazenie  $f: F^m \rightarrow F^n$ . Budeme ho označovať  $f_A$ .



## Matica lineárneho zobrazenia

### Príklad

Uvažujme lineárne zobrazenie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dané predpisom  $f(x, y) = (2x + y, x + y, x + 2y)$ . Dosadením zistíme, že platí

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (2, 1, 1)$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0, 1) = (1, 1, 2)$$

Teda matica tohoto zobrazenia je

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## Zloženie lineárnych zobrazení

### Veta

*Nech  $U, V, W$  sú vektorové priestory nad tým istým poľom  $F$ . Ak  $f: U \rightarrow V$  a  $g: V \rightarrow W$  sú lineárne zobrazenia, tak aj  $g \circ f$  je lineárne zobrazenie.*

### Poznámka

Ľahko sa overí, že ak  $f, g: V \rightarrow W$  sú lineárne zobrazenia, tak aj zobrazenia  $f + g$  a  $c \cdot f$  sú lineárne.

## Definícia súčinu matíc

### Príklad

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{g \circ f} = ?$$

$$\begin{aligned} g(f(\vec{\delta}_1)) &= g(1, 0, 2) = g(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3) = \\ &= g(\vec{e}_1) + 2g(\vec{e}_3) = (3, 1) + 2 \cdot (0, -1) = (3, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(\vec{\delta}_2)) &= g(2, 1, 1) = g(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 2g(\vec{e}_1) + g(\vec{e}_2) + g(\vec{e}_3) = \\ &= 2 \cdot (3, 1) + (1, 1) + (0, -1) = (7, 2) \end{aligned}$$

$$A_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

## Definícia súčinu matíc

$$f: F^m \rightarrow F^n \quad g: F^n \rightarrow F^k \quad g \circ f: F^m \rightarrow F^k$$
$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A_g = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} \quad A_{g \circ f} = ?$$

## Definícia súčinu matíc

$$\begin{aligned}g(f(\vec{\delta}_i)) &= g(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = \\g(a_{i1}\vec{e}_1 + a_{i2}\vec{e}_2 + \dots + a_{in}\vec{e}_n) &= g(a_{i1}\vec{e}_1) + g(a_{i2}\vec{e}_2) + \dots + g(a_{in}\vec{e}_n) = \\& a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}) + \\& a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k}) + \\& \vdots \\& a_{in}(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nk}) = \\(a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1}, & a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{in}b_{n2}, \dots, a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk})\end{aligned}$$

## Definícia súčinu matíc

### Definícia

Ak  $A$  je matica typu  $m \times n$  a  $B$  je matica typu  $n \times k$  nad poľom  $F$ , tak maticu  $C = \|\|c_{ij}\|\|$  typu  $m \times k$ , kde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$$

pre  $i = 1, 2, \dots, m$  a  $j = 1, 2, \dots, k$ , nazývame *súčin matíc*  $A$  a  $B$ . Označujeme ju  $A.B$ .

$$m \times \boxed{n \quad n} \times k$$

## Vlastnosti súčinu matíc

### Veta

Nech  $F$  je pole,  $f: F^m \rightarrow F^n$  a  $g: F^n \rightarrow F^k$  sú lineárne zobrazenia.  
Potom platí

$$A_{g \circ f} = A_f \cdot A_g$$

### Dôsledok

Násobenie matíc je asociatívne, teda

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

pre ľubovoľné matice také, že ich možno násobiť v uvedenom poradí.

## Vlastnosti súčinu matíc

### Veta

*Nech matice  $A, B, C$  nad poľom  $F$  sú majú také rozmery, že uvedené súčty a súčiny majú zmysel.*

$$\begin{aligned}I_m A &= A = A I_n \\A(B + C) &= AB + AC \\(B + C)D &= BD + CD\end{aligned}$$



## Lineárne zobrazenia a súčin matíc

$$f: F^m \rightarrow F^n$$

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot A_f$$

$$\vec{\alpha} \cdot A = (a_1, \dots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m \end{pmatrix} = a_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + a_m \vec{\alpha}_m =$$

$$a_1 f(\vec{\epsilon}_1) + \dots + a_m f(\vec{\epsilon}_m) = f(a_1 \vec{\epsilon}_1 + \dots + a_m \vec{\epsilon}_m) = f(a_1, \dots, a_m) = f(\vec{\alpha}).$$

## Lineárne zobrazenia a súčin matíc

Všimnime si, že

$$g(f(\vec{\alpha})) = g(\vec{\alpha}A_f) = \vec{\alpha}(A_fA_g),$$

čiže

$$A_{g \circ f} = A_f A_g.$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

## Inverzné zobrazenie

$g: Y \rightarrow X$  je inverzné k  $f: X \rightarrow Y$ , ak

$$g \circ f = id_X$$

$$f \circ g = id_Y$$

Označujeme:  $g = f^{-1}$ .

Inverzné zobrazenie  $f^{-1}$  existuje  $\Leftrightarrow f$  je bijekcia.

### Veta

Ak  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie  $f^{-1}: W \rightarrow V$ , tak  $f^{-1}$  je lineárne zobrazenie.

## Bijektivnosť lineárneho zobrazenia

### Lema

Nech  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  je báza  $V$ .

- (i) Zobrazenie  $f$  je injekcia  $\Leftrightarrow$  vektory  $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$  sú lineárne nezávislé.
- (ii) Zobrazenie  $f$  je surjekcia  $\Leftrightarrow [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$  (teda ak  $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$  generujú  $W$ ).

### Veta

Nech  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  je báza priestoru  $V$ . Zobrazenie  $f$  je bijekcia práve vtedy, keď vektory  $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$  tvoria bázu vektorového priestoru  $W$ .

## Bijektivnosť lineárneho zobrazenia

### Dôsledok

Nech  $f: F^n \rightarrow F^n$  je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i)  $f$  je bijekcia,
- (ii)  $f$  je prosté,
- (iii)  $f$  je surjektívne.

### Dôsledok

Nech  $f: F^n \rightarrow F^n$  je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (a) zobrazenie  $f$  je bijekcia,
- (b) existuje inverzné zobrazenie  $f^{-1}$ ,
- (c)  $h(A_f) = n$ .

## Definícia

### Definícia

Nech  $A$  je matica typu  $n \times n$ . Hovoríme, že matica  $B$  je *inverzná* k matici  $A$ , ak platí

$$AB = BA = I_n.$$

Označujeme ju  $B =: A^{-1}$ .

Inverzná matica = matica inverzného zobrazenia.

### Poznámka

Pre štvorcové matice platí:

$$AB = I \Rightarrow BA = I$$

# Regulárna matica

## Definícia

Štvorcová matica typu  $n \times n$  sa nazýva *regulárna*, ak  $h(A) = n$ .

## Veta

*Nech  $A$  je matica typu  $n \times n$ . K matici  $A$  existuje inverzná matica práve vtedy, keď  $A$  je regulárna.*

# Izomorfizmus

## Definícia

Bijektívne lineárne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$  nazývame *izomorfismus vektorových priestorov*  $V$  a  $W$  (alebo tiež *lineárny izomorfizmus*). Ak existuje bijektívne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$ , hovoríme, že vektorové priestory  $V$  a  $W$  sú izomorfné. Fakt, že  $V$  a  $W$  sú izomorfné označujeme  $V \cong W$ .

## Dôsledok

Ak  $V, W$  sú konečnorozmerné vektorové priestory a  $V \cong W$ , tak  $d(V) = d(W)$ .

## Veta

Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$  a  $d(V) = n$ . Potom  $V$  je izomorfný s priestorom  $F^n$ .