

Determinanty

14. decembra 2010

Riešenie sústav

Príklad

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

Dostaneme:

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

v prípade, že $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Riešenie sústav

Príklad

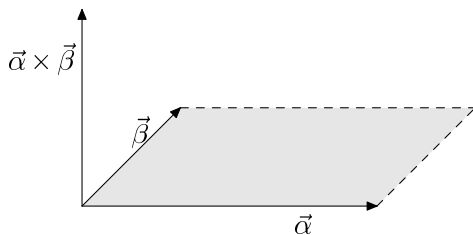
Ak označíme

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21},$$

tak predchádzajúcu rovnosť môžeme vyjadriť ako

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Plocha rovnobežníka

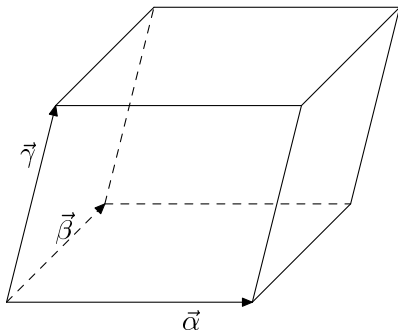


Plocha rovnobežníka

Rovnobežník určený vektormi $\vec{\alpha} = (a_{11}, a_{12})$ a $\vec{\beta} = (a_{21}, a_{22})$.
Vektory $(a_{11}, a_{12}, 0)$ a $(a_{21}, a_{22}, 0)$ majú vektorový súčin $(0, 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$.

$$S = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$$

Objem rovnobežnostena



Objem rovnobežnostena

$$|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| |\vec{\gamma}| \cos \alpha = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{\alpha} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$$

$$\vec{\beta} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

$$\vec{\gamma} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

$$a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Definícia determinantu

Definícia

V tejto kapitole budeme označovať ako S_n množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dvojica $(\varphi(k), \varphi(s))$ sa volá *inverzia* permutácie φ , ak $k < s$ ale $\varphi(k) > \varphi(s)$. Počet inverzií permutácie φ budeme označovať $i(\varphi)$.

Definícia determinantu

Príklad

Permutácia $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix})$ má 4 inverzie $(4,1)$, $(4,3)$, $(4,2)$, $(3,2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & 1 & & \\ 4 & & 3 & \\ 4 & & & 2 \\ & & 3 & 2 \end{matrix}$$

Definícia determinantu

Definícia

Nech A je matica typu $n \times n$ nad poľom F , $A = \|a_{ij}\|$. *Determinant matice* A je

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Definícia determinantu

φ	$i(\varphi)$	inverzie
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	0	
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	1	(3, 2)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	1	(2, 1)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	2	(2, 1) (3, 1)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2	(3, 1) (3, 2)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	3	(3, 2) (3, 1) (2, 1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Sarrusovo pravidlo

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

+ + +

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

- - -

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array}$$

Determinant A^T

Veta

Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = |A^T|.$$

Laplaceov rozvoj

Pre i -ty riadok:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Pre j -ty stĺpec:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

A_{ij} = algebraický doplnok prvku a_{ij} .

Laplaceov rozvoj

Pre maticu 3×3 :

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$$

$$A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

$$A_{21} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$$

$$A_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$$

$$A_{23} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$$

$$A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

$$A_{32} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Laplaceov rozvoj

Veta

Pre algebraický doplnok prvku a_{rs} štvorcovej matice A platí

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} |M_{rs}|$$

Dôsledok (Laplaceov rozvoj determinantu)

Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |M_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |M_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |M_{in}| \quad (2)$$

$$|A| = (-1)^{j+1} a_{1j} |M_{1j}| + (-1)^{j+2} a_{2j} |M_{2j}| + \dots + (-1)^{j+n} a_{nj} |M_{nj}| \quad (3)$$

Laplaceov rozvoj

Príklad

Nasledujúci determinant vypočítame Laplaceovým rozvojom podľa druhého stĺpca.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(-2) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 1$$

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Veta

Ak maticu B získame z A vynásobením k -teho riadku skalárom $c \in F$, tak

$$|B| = c|A|.$$

Dôsledok

Ak matica A má nulový riadok, tak $|A| = 0$.

Veta

Ak má matica A dva rovnaké riadky, tak $|A| = 0$.

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Veta

Nech matice A a B sú matice typu $n \times n$, ktoré sa líšia len v k -tom riadku. Potom $|A| + |B| = |C|$, kde $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ pre $i \neq k$ a $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$.

Veta

Ak matica B vznikne z A pripočítaním c -násobku niektorého riadku k inému (pričom $c \in F$), tak $|B| = |A|$.

Veta

Ak matica B vznikne z A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$. (Výmena 2 riadkov matice mení znamienko determinantu.)

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Veta

Ak A je horná trojuholníková matica (pod hlavnou diagonálou má nuly), tak determinant matice A sa rovná súčinu prvkov na diagonále.

$$|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Dôsledok

Determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu diagonálnych prvkov.

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

Veta

Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Matica A je regulárna práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Príklad

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
 - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1
 \end{aligned}$$

Determinant súčinu matíc

Veta

Nech A, B sú dve matice typu $n \times n$ nad poľom F . Potom platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Výpočet inverznej matice

Veta

Ak A je regulárna matica typu $n \times n$, tak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplnok prvku a_{ij} .

Výpočet inverznej matice

Maticu

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

nazývame *adjungovaná matica* k matici A .

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}.$$

Cramerovo pravidlo

Ak matica A je regulárna, tak riešenia sústavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_n \end{array} \right)$$

sú

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

kde A_i označuje maticu, ktorú dostaneme ak v matici A nahradíme i -ty stĺpec stĺpcom $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ (čiže pravými stranami).