Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Predhovor

1.2 Sylaby a literatúra

1.3 Základné označenia

Kapitola 2

Mno«iny a zobrazenia

2.1 Dôkazy

2.1.1 Základné typy dôkazov

2.1.2 Matematická indukcia

2.1.3 Drobné rady ako dokazova¸

2.1.4 Výroky, logické spojky, tautológie

2.1.5 Negácia výrokov s kvantifikátormi

Úloha 2.1.1. Doká«te, «e nasledujúce výroky sú tautológie:
a) $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
b) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$
c) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
d) $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$

2.2 Mno«iny a zobrazenia

2.2.1 Mno«iny

2.2.2 Zobrazenia

2.2.3 Vzor a obraz mno«iny*

Úloha 2.2.1. Doká«te: Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí by¸ f surjekcia?

Úloha 2.2.2. Doká«te: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.

Úloha 2.2.3. Doká«te: Ak $g \circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.

Úloha 2.2.4. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $X \neq \emptyset$ (t.j. X je neprázdna mno«ina). Potom:
a) f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, «e $g \circ f = id_X$.
b) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje g také, «e $f \circ g = id_Y$.
c) K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia. (Tým sme znovu dokázali tvrdenie 2.2.16.)

Úloha 2.2.5. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, $h\colon Y \to X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f, tak $g = h$.

Úloha 2.2.6. Nech M, N sú konečné mno«iny, M má m prvkov a N má n prvkov. Kožko existuje zobrazení mno«iny M do mno«iny N?

Úloha 2.2.7. Nech A je konečná mno«ina a $f\colon A \to A$ je zobrazenie. Doká«te:
a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.

Úloha 2.2.8. Doká«te: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre ka«dú mno«inu Z a vetky zobrazenia $g, h\colon Y \to Z$ platí: Ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.

Úloha 2.2.9. Doká«te: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre ka«dú mno«inu Z a vetky zobrazenia $g, h\colon Z \to X$ platí: Ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.

2.3 Permutácie

2.3.1 Rozklad na súčin disjunktných cyklov*

Úloha 2.3.1. Uva«ujme o permutáciach na mno«ine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Aká je inverzná permutácia ku: $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&2&5\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{smallmatrix}\right)$? Urobte aj skúku správnosti, t.j. po vypočítaní φ^{-1} overte, či $\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = id$. [$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&2&3&5\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&3&4\end{smallmatrix}\right)$]

Úloha 2.3.2. $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Vypočítajte: $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{smallmatrix}\right)$. Určte inverznú permutáciu k výsledku.

Úloha 2.3.3. Čomu sa rovná φ^{120}, ak $\varphi = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{smallmatrix}\right)$?

Úloha 2.3.4. Matematickou indukciou doká«te, «e $\varphi^{n+m} = \varphi^n \circ \varphi^m$, $\varphi^{nm} = (\varphi^n)^m$.

Kapitola 3

Grupy a polia

3.1 Binárne operácie

3.1.1 Zoveobecnený asociatívny zákon*

Úloha 3.1.1. Vypíte vetky mo«né binárne operácie na mno«ine $\{0,1\}$. Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku ka«dému prvku aj inverzný?

Úloha 3.1.2. Na $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ definujme operácie $\oplus$ a $\odot$ podobne ako pre $\mathbb{Z}_5$ v príklade 3.1.3. (Teda ako obvyklé sčitovanie a násobenie, iba«e po urobení tejto operácie urobíme zvyok po delení 7, čím dostaneme prvok zo $\mathbb{Z}_7$.) Zistite, či sú tieto operácie asociatívne, komutatívne, či existuje neutrálny prvok a či má ka«dý prvok inverzný. Vedeli by ste to v prípade operácie $\oplus$ nájs˛ inverzný prvok aj bez toho, «e by ste skúali jednotlivé prvky?

3.2 Grupy

Úloha 3.2.1. Ktoré z uvedených mno«ín tvoria vzhžadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(\mathbb{Z},\cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
b) $(\mathbb{R},\cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
c) $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$, d) $(\mathbb{C},+)$, e) $(\mathbb{C},\cdot)$, f) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$
g) $(\mathbb{R}^2,+)$ (so sčitovaním definovaným po zlo«kách)
h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a*b=a+b-1$
i) Mno«ina vetkých párnych celých čísel vzhžadom na sčitovanie.
j) Mno«ina vetkých nepárnych celých čísel vzhžadom na sčitovanie.
k) $(\mathbb{Z}_5,\oplus)$

Úloha 3.2.2. Tvoria vetky permutácie na konečnej mno«ine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabužku grupovej operácie v prípade $M=\{1,2,3\}$.

Úloha 3.2.3. Je $(\mathbb{R},*)$, kde $a*b=ab+a+b$, grupa? Ak nie, vedeli by ste vynecha˛ niektorý prvok a z mno«iny $\mathbb{R}$ tak, aby $(\mathbb{R}\smallsetminus\{a\},*)$ bola grupa?

Úloha 3.2.4. Nech G je mno«ina vetkých funkcií $f_{a,b}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ktoré sú tvaru $f_{a,b}(x)=ax+b$ pre nejaké reálne čísla $a,b\in\mathbb{R}$. Tvorí táto mno«ina funkcií s operáciou skladania grupu? Je mno«ina $\{f_{a,b}; a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0\}$ s operáciou skladania zobrazení grupa? Dostaneme grupu, ak vezmeme len také $a, b \in \mathbb{R}$, «e $a = 1$? V tých prípadoch, keď dostaneme grupu, je táto grupa komutatívna?

Úloha 3.2.5. Nech $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Je $(C_n, \cdot)$ grupa?

Úloha 3.2.6*. Budeme uva«ova¸ o nasledujúcich operáciach s mno«inami:
$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$ (zjednotenie)
$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$ (prienik)
$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$ (rozdiel)
$A \div B = \{x; x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$ (symetrická diferencia - ekvivalentne ju mô«eme definova¸ ako $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$)
Ak X je žubovožná mno«ina, $P(X)$ označíme mno«inu vetkých jej podmno«ín. Potom $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\div$ sú binárne operácie na $P(X)$. Je $P(X)$ s niektorou z týchto operácií grupa?

Úloha 3.2.7. Označme:
$M_1 = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; f \text{ je bijekcia}\}$
$M_2 = \{f \in M_1; f(n) = n$ pre vetky celé čísla n a« na konečný počet$\}$
$M_3 = \{f \in M_1; f(n) = n$ len pre konečný počet $n\}$.
Ktoré z mno«ín M_1, M_2, M_3 tvoria grupu spolu s operáciou skladania zobrazení?

Úloha 3.2.8. Nech G je mno«ina vetkých zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Na tejto mno«ine definujeme operáciu $\oplus$ tak, «e $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$. Je G s touto operáciou grupa? Ak definujeme $(f \odot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, bude $(G, \odot)$ grupa? Ktoré funkcie treba vynecha¸, aby sme dostali grupu?

Úloha 3.2.9. Nech $M \neq \emptyset$ je mno«ina a $(G, \circ)$ je grupa. Nech H je mno«ina vetkých zobrazení $f : M \to G$. Definujme na H binárnu operáciu $*$ tak, «e $(f * g)(x) = f(x) \circ g(x)$. Je $(H, *)$ grupa?

Úloha 3.2.10. Na mno«ine $\mathbb{R}^n$ (teda na mno«ine vetkých usporiadaných n-tíc reálnych čísel) definujeme binárnu operáciu $+$ ako $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Je $\mathbb{R}^n$ s touto operáciou grupa? (Pou«ili sme symbol $+$ v dvoch rôznych významoch – raz ako operáciu na $\mathbb{R}^n$, ktorú definujeme, a raz ako dobre známe sčitovanie na mno«ine $\mathbb{R}$. Keby sme chceli by¸ dôslední, zaviedli by sme nový symbol pre operáciu na $\mathbb{R}^n$, napríklad $(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. K tomuto problému – pou«ívanie rovnakého symbolu v rôznych významoch – sa ete vrátime.)

Úloha 3.2.11. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a : G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia.

Úloha 3.2.12. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Doká«te, «e zobrazenie $f : G \to G$ definované ako $f(a) = a^{-1}$ je bijekcia.

Úloha 3.2.13*. Nech G je žubovožná mno«ina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. Potom G je grupa práve vtedy, keď pre žubovožné $a, b \in G$ majú rovnice

$$a \circ x = b$$
$$y \circ a = b$$

rieenie v G (inými slovami, pre žubovožné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

Úloha 3.2.14*. Nech G je konečná mno«ina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, «e platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Doká«te, «e G je grupa.

Úloha 3.2.15*. Doká«te, «e v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, «e $a \circ a = e$.

Úloha 3.2.16. Nech $(G, *)$ je grupa a $a \in G$. Potom pre žubovožné $n \in \mathbb{N}$ definujeme matematickou indukciou prvok a^n nasledovne:
$a^0 = e$
$a^{n+1} = a^n * a$.
(Je to presne to, čo by sme intuitívne chápali pod zápisom $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{n\text{-krát}}$.)

Túto definíciu mô«eme rozíri¸ aj na záporné čísla tak, «e pre $n \in \mathbb{N}$ polo«íme $a^{-n} = (a^{-1})^n$. Tým je a^n definované pre žubovožné $a \in G$ a $n \in \mathbb{Z}$. (Vimnite si, «e to koreponduje s označením a^{-1}, ktoré pou«ívame pre inverzný prvok.)

Doká«te, «e pre žubovožné $a, b \in G$ a $m, n \in \mathbb{Z}$ platí:
a) $a^{m+n} = a^m * a^n$,
b) $(a^m)^n = a^{mn}$,
c) ak $a * b = b * a$, tak $a^n * b^n = (a * b)^n$,

Úloha 3.2.17. Nech konečná mno«ina $G = \{e, a_1, \ldots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Doká«te, «e $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$.

Úloha 3.2.18. Nech $*$ je binárna operácia na mno«ine A, taká, «e pre ka«dé $a, b, c \in A$ platí $a * (b * c) = (a * c) * b$ a $*$ má neutrálny prvok. Doká«te, «e operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

Úloha 3.2.19. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Doká«te, «e ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

Úloha 3.2.20. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre ka«dé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ $(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d)$ je grupa.

Úloha 3.2.21. Ak pre ka«dý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

3.3 Polia

Úloha 3.3.1. Doká«te ekvivalenciu definície 3.3.1 a 3.3.3.

Úloha 3.3.2. Ktoré z uvedených mno«ín tvoria spolu s obvyklým sčitovaním a násobením pole?
a) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$
b) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
c) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$
d) $F = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
e) $F = \{a + \sqrt{3}ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
f) $F = \{a + \frac{b}{\sqrt{2}}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
g*) $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

Úloha 3.3.3. V poli $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte $2^{-1} \oplus 4$, $(-2) \oplus 4$, $2^{-1} \odot 3$ a $-4 \odot 3^{-1}$.

Úloha 3.3.4. V $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte 2^3, $(2^{-1})^4$, $2 \odot (4^{-1})^3$, $(4 \odot 2^{-1})^3$, $(-1)^5 \odot (4 \odot 3^{-1})^2$.

Úloha 3.3.5. Nech m, n sú celé čísla, a, b, $b_1, \ldots, b_n$ sú prvky poža F. V úlohách f) a« j) predpokladáme, «e $a \neq 0$. Doká«te:[1]
a) $m \times a + n \times a = (m+n) \times a$
b) $m \times a + m \times b = m \times (a+b)$
c) $m \times (n \times a) = (mn) \times a$
d) $a.(n \times b) = n \times (a.b)$
e) $(m \times a)(n \times b) = (mn) \times (a.b)$
f) $m \times (m \times a)^{-1} = a^{-1}$
g) $a^m.a^n = a^{m+n}$
h) $a^m.b^m = (a.b)^m$
i) $(a^m)^n = a^{mn}$
j) $a^{2k} = (-a)^{2k}$
k) $n \times 0 = 0$
l) $1^n = 1$

Úloha 3.3.6. V žubovožnom poli F platí:

$$
\begin{gathered}
a+b=a+c \Rightarrow b=c \\
(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \\
-(-a)=a \\
-0=0 \\
-(a+b)=(-a)+(-b) \\
(a-b)c=ac-bc \\
1 \neq 0 \\
a.a=1 \Leftrightarrow a=1 \vee a=-1 \\
a.(b_1+\ldots+b_n)=a.b_1+\ldots+a.b_n
\end{gathered}
$$

Úloha 3.3.7. Na mno«ine $\mathbb{R}^+$ vetkých kladných reálnych čísel zadefinujme operácie $\oplus$ a $\odot$ tak, «e $x \oplus y = x.y$ a $x \odot y = x^y$. Ktoré z axióm poža splĺňa $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$?

Úloha 3.3.8. Nech F je pole a $a \in F$. Definujeme zobrazenie $f_a \colon F \to F$ tak, «e $f_a(b) = a+b$. Je f_a bijekcia? Ak áno, ako vyzerá zobrazenie f_a^{-1}? Čomu sa rovná $f_a \circ f_b$?

Ďalej definujeme $g_a \colon F \to F$ pre $a \neq 0$ tak, «e $g_a(b) = a.b$. Je to bijekcia?

Úloha 3.3.9. Nech na mno«ine $M = \{0,1\}$ sú operácie $+$ a $\cdot$ dané tabužkami

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

Ukä«te, «e $(M,+)$ a $(M \backslash \{0\}, \cdot)$ sú komutatívne grupy a «e platí distributívny zákon $(a+b)c = ac+bc$. Je $(M,+,\cdot)$ pole?

Úloha 3.3.10. Zistite, či $(\mathbb{R},+,*)$, kde $+$ je obvyklé sčitovanie reálnych čísel a pre ka«dé $a, b \in \mathbb{R}$ $a * b = -2ab$, je pole.

Úloha 3.3.11. Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujeme operácie $+$ a $\cdot$ takto:
a) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ a $(a,b).(c,d)=(ac,bd)$,
b) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ a $(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.
Je potom $(\mathbb{R} \times \mathbb{R},+,\cdot)$ pole?

[1] Podúlohy by mali by˛ usporiadané tak, «e ak v dôkaze niektorej z nich potrebujeme nejaké pomocné tvrdenie, máme ho u« dokázané v niektorej z predchádzajúcich častí tejto úlohy. Ak by sa Vám zdalo, «e poradie nie je správne, ozvite sa mi. Mô«eme sa spolu pozrie˛ na to, či som sa pomýlil alebo či je dôvodom odlineho poradia to, «e sa to dá dokazova˛ aj inak.

Úloha 3.3.12*. Pre ktoré prvky a poža $\mathbb{Z}_7$ má rieenie rovnica $x^2 = a$? Kožko je takých prvkov v poli $\mathbb{Z}_{109}$?

Úloha 3.3.13*. Doká«te, «e:
a) V žubovožnom poli platí $(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} \times a^{m-1}b + \binom{m}{2} \times a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{m-1} ab^{m-1} + b^m$. (Súčet na pravej strane sa zvykne označova¸ takto: $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \times a^{m-k}b^k$.)
b) V poli $\mathbb{Z}_p$ platí: $(a \oplus b)^p = a^p \oplus b^p$.

Úloha 3.3.14*. Pomocou úlohy 3.3.13 sa doká«te matematickou indukciou vzhžadom na a, «e v $\mathbb{Z}_p$ platí rovnos¸ $a^p = a$ (pre žubovožné $a \in \mathbb{Z}_p$). (Toto je vlastne iná formulácia malej Fermatovej vety.)

Kapitola 4

Vektorové priestory

4.1 Vektorový priestor

Úloha 4.1.1. Nech $\vec{\alpha} = (1,3,6)$, $\vec{\beta} = (2,1,5)$, $\vec{\gamma} = (4,-3,3)$. Vypočítajte $7\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$, $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^3$. [(-7,24,21), (0,0,0)]

Úloha 4.1.2. Uká«te, «e F je vektorový priestor nad F.

Úloha 4.1.3. Nech V je mno«ina vetkých postupností reálnych čísel. Pre postupnosti $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ definujeme $a + b = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $c.a = (c.a_n)_{n=1}^{\infty}$. Overte, «e V s týmito operáciami tvorí vektorový priestor nad požom $\mathbb{R}$.

Úloha 4.1.4. Nech M je neprázdna mno«ina, F je pole. Potom mno«ina vetkých zobrazení $f\colon M \to F$ so sčitovaním a násobením definovaným po bodoch (pozri príklad 4.1.4) tvorí vektorový priestor nad požom F. (Ak sa Vám zdá táto úloha príli zlo«itá, riete ju iba pre $F = M = \mathbb{R}$.)

Skúste si tie« uvedomi¸, «e týmto spôsobom sme súčasne overili, «e priestory F^n (príklad 4.1.3 a poznámka 4.1.5), F^F (príklad 4.1.4 a poznámka 4.1.5) a postupnosti prvkov z F (úloha 4.1.3) tvoria vektorové priestory. (Postupnosti mô«eme chápa¸ ako zobrazenia z $\mathbb{N}$ do F. Usporiadané n-tice mô«eme chápa¸ ako zobrazenia z $\{1,2,\dots,n\}$ do F.)

Úloha 4.1.5. Nech F je žubovožné pole a nech $\vec{\alpha}$ je žubovožný prvok. Nech $V = \{\vec{\alpha}\}$. Na V zavedieme operáciu sčitovania ako $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ a násobenie skalárom $c.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ (pre ka«dé $c \in F$). Doká«te, «e V je vektorový priestor nad požom F.

Úloha 4.1.6. Overte, «e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po zlo«kách tvorí vektorový priestor nad požom $\mathbb{Z}_2$.

Úloha 4.1.7. Nech F je pole, $V = F^n$. Definujeme $(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n)$, $c(x_1,\dots,x_n) = (cx_1,\dots,cx_n)$ pre $c, x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_n \in F$. Potom V je vektorový priestor nad požom F.

Úloha 4.1.8. Kožko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$?

Úloha 4.1.9. Overte, «e vetky zobrazenia $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po bodoch tvoria vektorový priestor nad požom $\mathbb{R}$.

Úloha 4.1.10. Overte, «e $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$. Je $\mathbb{C}$ vektorový priestor nad $\mathbb{Z}$?

Úloha 4.1.11. Nech V je vektorový priestor nad požom F, $c, c_1 \dots c_k \in F$, $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Doká«te, «e potom platí $c(\vec{\alpha}_1 + \dots \vec{\alpha}_n) = c\vec{\alpha}_1 + \dots + c\vec{\alpha}_n$, $(c_1 + \dots + c_k)\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha} + \dots + c_k\vec{\alpha}$. Čomu sa rovná $(c_1 + \dots + c_k)(\vec{\alpha}_1 + \dots \vec{\alpha}_n)$?

Úloha 4.1.12. Doká«te, «e vo vektorovom priestore V nad požom F pre ka«dé $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$, $c \in F$ platí:
a) $c(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = c\vec{\alpha} - c\vec{\beta}$
b) $c(-\vec{\alpha}) = -c\vec{\alpha}$
c) $(c - d)\vec{\alpha} = c\vec{\alpha} - d\vec{\alpha}$
d) $(-c)(-\vec{\alpha}) = c\vec{\alpha}$
e) $\vec{\gamma} - (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$
f) $-(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta})$

Úloha 4.1.13. Pre celé číslo n a vektor $\vec{\alpha}$ definujeme $n \times \vec{\alpha}$ podobným spôsobom, ako sme definovali $n \times a$ pre prvok a nejakého poža F. Doká«te, «e potom platí $n \times (c.\vec{\alpha}) = c.(n \times \vec{\alpha})$.

Úloha 4.1.14. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, «e $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ pre žubovožné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r.(a, b) = (ra, 2rb)$ pre žubovožné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

4.2 Podpriestory

Úloha 4.2.1. Podrobne doká«te dôsledok 4.2.9.

Úloha 4.2.2. Doká«te, «e mno«ina vetkých funkcií $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré sú tvaru $a + b\cos x + c\sin x$ pre nejaké $a, b, c \in \mathbb{R}$ tvoria vektorový podpriestor priestoru vetkých reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Úloha 4.2.3. Ktoré z týchto mno«ín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$?
a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \lor x_2 = 0\}$
d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Úloha 4.2.4. Ktoré z týchto podmno«ín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
a) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnos¸ou $2f(0) = f(1)$
b) nezáporné funkcie
c) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnos¸ou $f(1) = 1 + f(0)$
d) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnos¸ou $(\forall x \in \langle 0, 1 \rangle) f(x) = f(1 - x)$
e) ohraničené funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f) spojité funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
h) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, «e existuje konečná $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$
i*) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, «e existuje konečná alebo nekonečná $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Úloha 4.2.5. Overte, či
a) mno«ina vetkých polynómov s reálnymi koeficientami,
b) mno«ina vetkých polynómov s reálnymi koeficientami stupňa najviac n,
c) mno«ina vetkých polynómov párneho stupňa,
d) mno«ina vetkých polynómov stupňa práve n
sú vektorové priestory. Sčitovanie a násobenie skalárom definujeme rovnako ako pre reálne funkcie.

4.3 Lineárna kombinácia, lineárna nezávislos˛

4.3.1 Lineárna kombinácia a lineárny obal

4.3.2 Lineárna nezávislos˛

Úloha 4.3.1. Doká«te, «e vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, kde $n \geq 2$, sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou nasledujúcich.

Úloha 4.3.2. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú žubovožné vektory z vektorového priestoru V nad požom $\mathbb{R}$. Potom $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$.

Úloha 4.3.3. Nech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y + 5z = 0\}$. Uká«te, «e M je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^3$ a nájdite vektory, ktoré ho generujú.

Úloha 4.3.4. P_n označme mno«inu vetkých polynómov stupňa najviac n s reálnymi koeficientami. P_n je podpriestor vektorového priestoru vetkých zobrazení $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Platí $P_n = [1, x, \dots, x^n]$?

Úloha 4.3.5. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslunom vektorovom priestore:
a) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) v $\mathbb{R}^3$,
b) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) v $\mathbb{R}^3$,
c) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_5^3$
d) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_7^3$.

Úloha 4.3.6. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore vetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$:
a) $x + 1$, x^2, x^3,
b) 1, $x + a$, $x^2 + bx + c$ (a, b, c mô«u by˛ žubovožné reálne čísla),
c*) 1, $\cos x$, $\cos^2(\frac{x}{2})$,
d) x, $x(x - 1)$, $x(x - 1)(x - 2)$,
e) 1, $\cos x$, $\cos 2x$.

Úloha 4.3.7. Ak $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé vo vektorovom priestore V nad požom $\mathbb{R}$, tak aj $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé. (Platilo by to aj vo vektorovom priestore nad požom $\mathbb{Z}_2$?)

Úloha 4.3.8. Mno«ina $\{\vec{\alpha}\}$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Dva vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého (t.j. existuje $c \in F$ tak, «e $c.\vec{\alpha} = \vec{\beta}$), alebo jeden z nich je $\vec{0}$.

Ak vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ sú lineárne nezávislé, tak $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{\gamma}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Úloha 4.3.9*. Overte, «e $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad požom $\mathbb{Q}$. Doká«te, «e v tomto priestore sú 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.

Úloha 4.3.10. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú žubovožné vektory. Zistite, či sú tieto systémy vektorov lineárne závislé:
a) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\gamma}$, b) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, 0$, c) $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, d) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\gamma}, \vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Úloha 4.3.11. Nájdite 4 vektory v $\mathbb{R}^2$ tak, aby ka«dé dva z nich boli lineárne nezávislé.

Úloha 4.3.12. Nech vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory v nejakom vektorovom priestore nad požom $\mathbb{R}$. Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+\ldots+n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?

4.4 Báza a dimenzia

Úloha 4.4.1. Viete poveda˛, na ktorom mieste predchádzajúceho dôkazu sme vyu«ili, «e V je konečnorozmerný?

Úloha 4.4.2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:
a) (1,2,3), (1,-2,3), (1,2,-3)
b) (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)
c) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).

Úloha 4.4.3. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{Z}_5^3$:
a) (1,2,3), (2,3,4), (0,3,1)
b) (1,0,0), (0,1,2), (2,1,3)
c) (0,1,2), (3,0,1), (1,0,2).

Úloha 4.4.4. P_n označme priestor vetkých polynómov stupňa najviac n. Overte, «e $d(P_n) = n+1$ a «e $1, x-1, \ldots (x-1)^n$ je báza tohoto priestoru.

Úloha 4.4.5. Určte dimenziu priestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1,3,2,1)$, $\vec{\beta} = (4,9,5,4)$ a $\vec{\gamma} = (3,7,4,3)$.

Úloha 4.4.6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu prísluného vektorového priestoru:
a) (1,1,2), (2,1,3) v $\mathbb{R}^3$,
b) x^2-1, x^2+1 v priestore polynómov stupňa najviac 3,
c) (1,2,3,0), (3,4,1,2) v $\mathbb{Z}_5^4$.

Úloha 4.4.7. Ak ka«dý z vektorov $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m])$.

Úloha 4.4.8. Overte, «e mno«ina $S = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (\exists a, b \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = ax+b\}$ je podpriestor priestoru vetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, «e $S = [g, h]$.

Úloha 4.4.9. Zistite, či $S = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax^2+bx+c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií. Ak áno, nájdite, $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, «e $S = [g_1, g_2, g_3]$.

Úloha 4.4.10. Nájdite bázu pre ka«dý vektorový podpriestor z úlohy 4.2.3.

4.5 Lineárne a direktné súčty podpriestorov

Úloha 4.5.1. Zistite[1] $d(U)$, $d(V)$, $d(U+V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U+V$ a bázu $U \cap V$
a) v $\mathbb{R}^2$ pre $U = [(2,5)]$, $V = [(1,3)]$

[1] Túto úlohu budeme riei˛ neskôr, keď sa (v časti 5.2) naučíme jednoduchý spôsob ako nájs˛ dimenziu a bázu daného podpriestoru $\mathbb{R}^n$. Zaradil som ju vak sem, preto«e súvisí s témou tejto podkapitoly.

b) v $\mathbb{R}^3$ pre $U = [(1,2,3),(-1,2,3)]$, $V = [(2,1,4),(-2,1,4)]$
c) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,0,1,0),(1,0,0,1)]$, $V = [(1,1,1,0),(1,0,1,1)]$
d) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$, $V = [(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,3,1; d)2,3,4,1]

Úloha 4.5.2. Nech $T = [(1,3,2),(2,1,3),(3,4,0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, «e $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?

Úloha 4.5.3. Nech $S \neq T$ sú dva podpriestory vektorového priestoru F^3 nad požom F a $d(S) = 2$, $d(T) = 2$. Doká«te, «e $d(S \cap T) \geq 1$.

Úloha 4.5.4. Doká«te, «e ak $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k}$ je báza vektorového priestoru V, tak $V = [\vec{e_1}] \oplus \ldots \oplus [\vec{e_k}]$.

Kapitola 5

Lineárne zobrazenia a matice

5.1 Matice

Úloha 5.1.1. Overte, «e matice typu $m \times n$ nad požom F (spolu so sčitovaním matíc a násobením matice skalárom) tvoria vektorový priestor nad F.

Úloha 5.1.2. Doká«te, «e diagonálne matice tvoria podpriestor vektorového priestoru vetkých matíc typu $n \times n$.

Úloha 5.1.3. Nech matice A a B sú rovnakého typu. Doká«te, «e potom $(A+B)^T = A^T + B^T$ a $(A^T)^T = A$. Čomu sa rovná $(c_1A + c_2B)^T$?

Úloha 5.1.4. Doká«te, «e
a) mno«ina vetkých symetrických matíc typu $n \times n$ a
b) mno«ina vetkých antisymetrických matíc typu $n \times n$
tvoria podpriestory vektorového priestoru vetkých matíc typu $n \times n$. Je vektorový priestor matíc typu $n \times n$ direktný súčet týchto podpriestorov?

Úloha 5.1.5. Doká«te, «e ka«dá tvorcová matica sa dá napísa˛ ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice. Je vektorový priestor vetkých matíc typu $n \times n$ direktným súčtom priestorov z úlohy 5.1.4.

5.2 Riadková ekvivalencia a hodnos˛ matice

Úloha 5.2.1. Nájdite redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s nasledujúcimi maticami a) nad požom $\mathbb{R}$ b) nad požom $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 2&3&1\\ 1&2&1\\ 3&4&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&3\\ 3&2&2\\ 0&4&3\\ 4&1&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\ 3&2&3&2\\ 1&4&0&0\\ 4&1&2&3 \end{pmatrix}$$

Úloha 5.2.2. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(\mathbb{Z}_5)^4$:
a) (1,2,0,0), (3,4,0,1)
b) (1,2,3,4), (1,1,1,1), (3,2,1,0)
c) (2,3,4,1), (3,2,4,1), (0,2,3,2)
d) (1,3,1,4,), (3,10,4,3), (2,3,1,1)

Úloha 5.2.3. Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru vetkých matíc typu 2×2 nad požom $\mathbb{R}$:
a) $\begin{pmatrix} 1&2\\ 0&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3\\ 5&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&0\\ 1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&5\\ 4&2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1&2\\ 3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3\\ 1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1\\ 4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&4\\ 0&5 \end{pmatrix}$

Úloha 5.2.4. Zistite, ktoré z daných vektorov patria do podpriestoru [(1,4,1,0),(2,3,-2,-3),(0,2,−5,−6)] priestoru $\mathbb{R}^4$: a) (4,11,-3,-3), b)(1,0,11,12), c) (3,0,4,1), d) (1,-1,2,-2).

Úloha 5.2.5. Zistite, či $[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2] \subseteq [\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3]$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ nad požom $\mathbb{R}$, ak $\vec{\gamma}_1 = (1,1,5,1)$, $\vec{\gamma}_2 = (1,0,2,1)$, $\vec{\gamma}_3 = (2,1,0,1)$, $\vec{\beta}_1 = (1,1,5,1)$ a $\vec{\beta}_2 = (-1,1,6,-2)$.

Úloha 5.2.6. Zistite hodnosti matíc
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Úloha 5.2.7. Upravte danú maticu nad požom $\mathbb{R}$ na redukovaný trojuholníkový tvar a určte hodnos¸ matice
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 25 & -1 & -4 \\ 3 & 9 & 1 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

Úloha 5.2.8. Určte hodnos¸ danej matice v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$
$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & c & 2c \\ 1 & -1 & 3 & -c \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$

Úloha 5.2.9. Zistite, či priestor [(2,4,4,2,4),(3,1,1,2,2),(4,3,3,2,0)] je podpriestor priestoru [(1,1,0,1,4),(2,1,3,3,1),(3,2,1,1,3)] a) nad $\mathbb{Q}$, b) nad $\mathbb{Z}_5$, c) nad $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 5.2.10. Zistite, ktoré z daných matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Úloha 5.2.11. Nájdite bázu daného podpriestoru a určite jeho dimenziu:
a) $[(1,1,0,-1),(0,1,2,1),(1,0,1,-1),(1,1,-6,-3),(-1,-5,1,0)]$ v $\mathbb{R}^4$;
b) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,-2,1,0)]$ v $\mathbb{R}^5$
c) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_5^5$
d) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_7^5$.

Úloha 5.2.12. Zistite, pre aké hodnoty parametra c sú dané vektory lineárne závislé
a) $(-1,0,-1)$, $(2,1,2)$, $(1,1,c)$ v $\mathbb{R}^3$;
b)

Úloha 5.2.13*. Určite hodnos¸ matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, «e $a_1, \dots, a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre vetky $i \neq j$).

5.3 Lineárne zobrazenia

Úloha 5.3.1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:
a) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(3,1,2) = (1,-1,1,-1)$,
b) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (-1,1,-1,2)$,
c) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (1,-1,1,-1)$.

Úloha 5.3.2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíte jeho predpis.
a) $f(1,1) = (0,1)$, $f(6,1) = (3,2)$
b) $f(2,3) = (1,0)$, $f(3,2) = (6,1)$

Úloha 5.3.3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takého, «e:
a) $f(1,2,3,1) = (1,3,1,0)$, $f(2,1,3,0) = (0,1,3,1)$, $f(3,2,1,0) = (1,0,3,0)$, $f(2,2,3,4) = (3,1,0,4)$
b) $f(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$, $f(2,1,3,1) = (1,0,3,1)$, $f(0,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
c) $f(0,1,1,1) = (1,0,0,0)$, $f(1,0,1,1) = (0,1,0,0)$, $f(1,1,0,1) = (0,0,1,0)$, $f(1,1,1,0) = (0,0,0,1)$

Úloha 5.3.4. Nech V a W sú vektorové priestory nad požom F. Doká«te, «e zobrazenie $f\colon V \to W$ je lineárne práve vtedy, keď pre ka«dé $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a pre ka«dé $c, d \in F$ platí $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$.

Úloha 5.3.5. Nech V a W sú vektorové priestory nad požom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.

Úloha 5.3.6. Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad požom F. Doká«te:
Ak S je podpriestor vektorového priestoru V, tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W.
Ak T je podpriestor vektorového priestoru W, tak $f^{-1}(T) = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V.

5.4 Súčin matíc

Úloha 5.4.1. Doká«te:
a) $(AB)^T = B^T A^T$
b) Ak A je symetrická matica, tak aj A^n pre ka«dé $n \in N$ je symetrická matica.

Úloha 5.4.2. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A+B)^2$, ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Úloha 5.4.3. Vyrátajte $E.A$ a $A.E$ pre $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a a) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ b) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ c) $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ d) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vedeli by ste nájs˛ riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu $E.A$ resp. $A.E$? (Viac sa o súvise násobenia matíc a elementárnych riadkových/stĺpcových operácií mô«ete dozvedie˛ v podkapitole 5.6).

Úloha 5.4.4. Pre tvorcovú maticu C typu $n \times n$ budeme výraz $\mathrm{Tr}(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{nn}$ nazýva˛ *stopa matice* C.

Ukᫍte, «e ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad požom F, tak platia rovnosti $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)^T$ a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Zistite, či pre žubovožné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vz˛ahy $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$ a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vz˛ahov neplatí, bude plati˛ za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?

Úloha 5.4.5. Nech A, B sú matice nad požom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Doká«te, «e $h(AB) \leq h(A)$. Doká«te, «e ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.

Úloha 5.4.6. Nech A, B sú matice nad požom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Doká«te, «e $h(AB) \leq h(B)$. Doká«te, «e ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

5.5 Inverzná matica

Úloha 5.5.1. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad R:
$\begin{pmatrix} 2&3&1\\ 4&3&3\\ 1&2&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&3&1\\ 2&4&3\\ 3&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&0&1\\ 0&3&2\\ 1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&1\\ 2&-1&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&2&1\\ 4&2&1\\ 1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&\sqrt{2}&\sqrt{6}\\ 0&1&\sqrt{3}\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\\ -1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&5&-9\\ 1&1&-2\\ -2&-3&6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1\\ -\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&1&0\\ \frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\ 1&-1&-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&-\sqrt{2}&0\\ 0&1&-\sqrt{3}\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$

Úloha 5.5.2. Nech $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, «e $f(1,2,3,1) = (2,0,1,0)$, $f(0,2,3,1) = (1,2,0,3)$, $f(1,0,3,4) = (3,2,1,0)$, $f(4,1,3,2) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1}.

Úloha 5.5.3. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad $\mathbb{Z}_2$ b) nad $\mathbb{Z}_3$, ak áno, nájdite inverznú.

Úloha 5.5.4*. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobi˛ bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1}.
$A = \begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1&2&1\\ 0&1&-1\\ 0&-1&2 \end{pmatrix}$
Ako skúku správnosti mô«ete vyskúa˛, či po vynásobení výsledku zžava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).

5.6 Elementárne riadkové operácie a súčin matíc*

5.7 Sústavy lineárnych rovníc

5.7.1 Homogénne sústavy lineárnych rovníc

5.7.2 Gaussova eliminačná metóda

5.7.3 Frobeniova veta

Úloha 5.7.1. Nájdite vetky rieenia daných sústav rovníc nad požom $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = 1\\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3\\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = 1\\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = 1\\ x_1 + x_2 + x_3 & = 4\\ x_2 + x_3 + x_4 & = -3\\ x_3 + x_4 + x_5 & = 2\\ x_4 + x_5 & = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +x_4 & = 3\\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +5x_4 & = -3\\ x_1 & +2x_2 & & -4x_4 & = -3\\ x_1 & -x_2 & -4x_3 & +9x_4 & = 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 5\\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +5x_4 & = 3\\ x_1 & +5x_2 & -9x_3 & +8x_4 & = 1\\ 5x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +5x_4 & = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & -5y & +3z & +t & = 5\\ 3x & -7y & +3z & -t & = -1\\ 5x & -9y & +6z & +2t & = 7\\ 4x & -6y & +3z & +t & = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} x & +2y & +4z & -3t & = 0\\ 3x & +5y & +6z & -4t & = 0\\ 4x & +5y & -2z & +3t & = 0\\ 3x & +8y & +24z & -19t & = 0 \end{array}$$

Úloha 5.7.2. Riete v $\mathbb{Z}_5$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&3&1\\ 1&2&4&0&2\\ 2&1&3&4&3\\ 3&0&4&4&4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 3&1&2&2&1\\ 4&4&2&1&0\\ 0&1&2&4&1\\ 2&1&1&2&3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 2&4&1&1&2\\ 3&3&3&2&1\\ 1&4&2&1&1\\ 4&2&0&3&2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&2&4\\ 2&3&1&1&3\\ 4&3&1&3&2\\ 3&4&3&2&1 \end{array}\right)$

Úloha 5.7.3. Riete v $\mathbb{R}$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$

Rieenie: a) nemá rieenie, b) (1,2,3) c) $(t-\frac{3}{5}, t+\frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$

Úloha 5.7.4. Riete v $\mathbb{Z}_7$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Úloha 5.7.5. Mô«ete si vymyslie¸ kopec vlastných sústav. Stačí najprv zvoli¸ rieenie, koeficienty a doráta¸ pravé strany. Skúste vymyslie¸ aj také sústavy, ktoré nemajú rieenie alebo majú viac ne« jedno rieenie.

Úloha 5.7.6. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi (1,2), (-1,6) a (2,3).

Úloha 5.7.7*. O sústave n rovníc o n neznámych nad požom $\mathbb{R}$ vieme, «e jej koeficienty tvoria aritmetickú postupnos¸ (ako napríklad pre maticu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right)$) a «e táto sústava má jediné rieenie. Nájdite rieenie sústavy.

5.8 Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

Úloha 5.8.1. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Úloha 5.8.2. Nájdite lineárne zobrazenie (ak také existuje), ktoré je prosté a spĺňa podmienky:
a) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(1,-1,1) = (1,2,-2)$, $f(0,1,-2) = (0,-1,2)$,
b) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(1,-1,1) = (1,2,-2)$, $f(1,1,1) = (3,2,4)$,
c) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(0,-1,2) = (0,1,1)$, $f(1,1,-1) = (2,3,2)$.

Úloha 5.8.3. Nájdite lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ak také existuje), pre ktoré: $f(3,2,3) = (5,-3,-2)$, $f(0,2,1) = (2,0,-2)$, $f(3,0,3) = (3,-3,0)$. Určte bázu a dimenziu jeho jadra a obrazu.

Úloha 5.8.4. Nech $f\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označova¸ $f \circ f$. Doká«te

(a) $\operatorname{Ker} f^2 \supseteq \operatorname{Ker} f$,

(b) $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$,

(c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \supseteq \operatorname{Im} f$.

5.9 Hodnos¸ transponovanej matice

Kapitola 6

Determinanty

6.1 Motivácia

6.2 Definícia determinantu

6.3 Výpočet determinantov

6.3.1 Laplaceov rozvoj

6.3.2 Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

6.4 Determinant súčinu matíc

6.5 Vyu«itie determinantov

6.5.1 Výpočet inverznej matice

6.5.2 Cramerovo pravidlo

Úloha 6.5.1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant. Výsledky (bez záruky): 0,8,8.

Úloha 6.5.2. Vyriete v $\mathbb{Z}_5$ pomocou Cramerovho pravidla: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Úloha 6.5.3. Pomocou Cramerovho pravidla riete:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & =1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =0 \end{array}$$

(Návod: Skúste zvoli¸ x_3, x_4 za parametre.)

Úloha 6.5.4. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku urči¸ ich hodnos¸?
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Úloha 6.5.5. Nájdite inverznú maticu k maticiam z úlohy 5.5.1 pomocou determinantu.

Úloha 6.5.6. Vypočítajte inverznú maticu:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & -1 \end{pmatrix}$

Úloha 6.5.7*. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = ?$

Úloha 6.5.8*. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

Úloha 6.5.9*. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$

Úloha 6.5.10*. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$

Kapitola 7

Euklidovské vektorové priestory

7.1 Skalárny súčin

7.2 Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Úloha 7.2.1. Nájdite bázu a dimenziu $S^{\perp}$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
a) $S = [(1,1,0,1),(2,1,0,1)]$
b) $S = [(1,5,4,3),(2,-1,2,-1)]$
c) $S = [(1,2,1,1),(2,1,-1,-1)]$
d) $S = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$
e) $S = [(2,1,2,3),(0,1,-2,1),(1,0,2,1)]$
f) $S = [(1,1,1,2),(1,0,1,1),(0,1,2,1)]$

Úloha 7.2.2. Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$. Nech $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$.
a) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
b) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
c) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
d) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
e) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
f) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
g) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
h)$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
i)$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$

Úloha 7.2.3. Zistite, či $\sin\pi x$ a $\cos\pi x$ sú kolmé v priestore $C(0,1)$ so skalárnym súčinom z príkladu 7.1.5. Akú majú tieto vektory veľkos ¿?

Úloha 7.2.4. Nájdite ortonormálnu bázu pre priestory z úlohy 7.2.1.

Dodatok A

Delenie so zvykom

Dodatok B

Komplexné čísla

B.1 Definícia komplexných čísel, algebraický tvar komplexného čísla

Úloha B.1.1. Overte, «e platí (pre žubovožné $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
\overline{z_1 . z_2} &= \overline{z_1} . \overline{z_2} \\
z.\overline{z} &= |z|^2 \\
z = \overline{z} \qquad &\Leftrightarrow \qquad z \text{ je reálne} \\
z = -\overline{z} \qquad &\Leftrightarrow \qquad z \text{ je rýdzoimaginárne}
\end{aligned}$$

B.2 Geometrická interpretácia komplexných čísel, goniometrický tvar, Moivrova veta

B.3 Rieenie rovníc v komplexných číslach

B.3.1 Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

B.3.2 Binomické rovnice

B.4 Zopár ďalích vecí súvisiacich s komplexnými číslami

Úloha B.4.1. Vypočítajte

a) $(3+2i)+(2-i)$	b) $(1+i)+(1-i)$	c) $(1+3i)+(\sqrt{3}+i)$
d) $(3+2i).(2-i)$	e) $(1+i).(1-i)$	f) $(1+\sqrt{3}i).(\sqrt{3}+i)$
e) $(3+2i)-(2-i)$	f) $(1+i)-(1-i)$	g) $(1+3i)-(\sqrt{3}+i)$
h) $(3+2i)/(2-i)$	i) $(1+i)/(1-i)$	j) $(1+\sqrt{3}i)/(\sqrt{3}+i)$

Úloha B.4.2. Overte výpočtom, «e pri oboch uzátvorkovaniach výrazu $(1+2i)(1-i)(2-i)$ dostaneme ten istý výsledok.

Úloha B.4.3. Overte, «e pre sčitovanie a násobenie komplexných čísel platí distributívnos ¸.

Úloha B.4.4. Overte, «e pre komplexné čísla platí trojuholníková nerovnos¸ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Čo predstavuje táto nerovnos¸ geometricky?

Úloha B.4.5. Vieme, «e na reálnej osi predstavujú rieenia nerovnice $|x - a| < r$ interval $(a - r, a + r)$ (pre $a, r \in \mathbb{R}$ a $r > 0$). Aký geometrický útvar v komplexnej rovine tvoria komplexné čísla vyhovujúce podmienke:
a) $|z - z_0| < r$,
a) $|z - z_0| = r$,
a) $|z - z_0| \leq r$,
kde z_0 je dané komplexné číslo a r je dané kladné reálne číslo?

Úloha B.4.6*. Ak $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, aký geometrický útvar tvoria body zodpovedajúce komplexným číslam s vlastnos¸ou $|z - z_1| + |z - z_2| = r$? Načrtnite ho pre $z_1 = 0$ a $z_2 = 3 + 2i$.

Úloha B.4.7. Nájdite goniometrický tvar daných komplexných čísel:
a) $1 - i$; b) $\sqrt{3} + i$; c) $-i$; d) $2 + i$; e) $(1 + i)(1 - i)$

Úloha B.4.8. Vyriete rovnice:
a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 2 = 0$ c) $x^2 - 6x + 13 = 0$ d) $x^2 + 2x + 50 = 0$ e) $x^2 + x + 1 = 0$

Úloha B.4.9. Vyriete rovnice:
a) $z^2 = \frac{1-3i}{1+3i} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$; b) $z^6 = i$; c) $\frac{z^4}{8} + i\sqrt{3} = -1$; d) $z^4 = 1 + i$

Úloha B.4.10. Vyriete rovnice:
a) $x^2 - (1 + 2i)x - 3 + i = 0$ b)$x^2 - 2x + 1 - 2i = 0$ c) $x^2 - (4 + 3i)x + 1 + 5i = 0$ d) $x^2 - 3(1 + i)x + 5i = 0$ e) $x^2 + (1 + i)x - 4i = 0$

Úloha B.4.11. Riete rovnice:
a) $z^3 - iz^2 + 4z - 4i = 0$ b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$ c) $x^3 - (3 + 2i)x^2 + 2(1 + 3i)x - 4i = 0$ d) $x^3 - 2ix^2 - x + 2i = 0$

Úloha B.4.12. Riete sústavy (mô«ete napr. pou«i¸ Gaussovu eliminačnú metódu, vyráta¸ inverznú maticu, pou«i¸ Cramerovo pravidlo):
$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 1 \\ 1 & -1 & i \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & -i & 0 \\ i & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 1 & 1-i & 2i \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} -1+i & 2-i & 1+i \\ -1+2i & 3-2i & 1-i \end{array}\right)$

Úloha B.4.13. Nájdite vetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^6 = \frac{3+4i}{3-4i}$