

## Axiomatický prístup k teórii množín

20. septembra 2011

## Georg Cantor

Georg Cantor - zakladateľ teórie množín

1874 - dôkaz o existencii transcendentných čísel

Nepoužíval axiomatický prístup – tzv. naivná teória množín.

Množina = súhrn objektov určených nejakou vlastnosťou.

## Russellov paradox

Spomedzi všetkých množín vyberieme tie množiny, ktoré nie sú prvkom samej seba.

$$A = \{x; x \notin x\}$$

Ak  $A \in A$ , tak  $A \notin A$  – spor.

Ak  $A \notin A$ , tak  $A \in A$  – spor.

## Berryho paradox

$B = \{n; n \text{ je prirodzené číslo, ktoré sa dá definovať najviac 20 slovami slovenského jazyka}\}$

Zoberieme najmenšie  $n$ , ktoré nepatrí do  $B$ :

$n =$  je najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá popísať najviac 20 slovami slovenského jazyka

Máme  $n \in B$  aj  $n \notin B$ .

# Hilbertov program

Ciele: Pomocou axiomatického prístupu

- ▶ odstrániť známe paradoxy;
- ▶ dokázať bezspornosť teórie množín;
- ▶ v rámci tejto teórie sformalizovať celú matematiku.

## Jazyk teórie množín

- ▶ Ak  $x, y$  sú množinové premenné, tak  $(x = y)$  a  $(x \in y)$  sú formuly teórie množín. (Tieto dva typy formlí nazývame *atomické formuly*.)
- ▶ Ak  $\varphi, \psi$  sú formuly teórie množín, tak aj zápisy  $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi$  a  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  sú formuly teórie množín.
- ▶ Ak  $x$  je množinová premenná a  $\varphi$  je formula teórie množín, tak  $((\exists x)\varphi)$  a  $((\forall x)\varphi)$  sú tiež formuly teórie množín.

Za *formuly teórie množín* považujeme len atomické formuly a formuly, ktoré z nich vieme získať použitím konečného počtu uvedených pravidiel.

## Axiómy systému ZFC

### Axióma I (Axióma extenzionality)

$$(\forall x)(\forall y)[(x = y) \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)]$$

Dve množiny sa rovnajú práve vtedy, keď obsahujú rovnaké prvky.

### Axióma IV (Axióma existencie)

$$(\exists x)(x = x)$$

Existuje aspoň jedna množina.

## Axiómy systému ZFC

### Axióma II (Axióma zjednotenia množín)

$$(\forall A)(\exists U)(\forall z)(z \in U \Leftrightarrow (\exists a \in A)(z \in a))$$

Pre ľubovoľnú množinu  $A$  existuje taká množina  $U$ , ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do niektorej z množín patriacich do  $A$ .

### Axióma III (Axióma dvojice)

$$(\forall a)(\forall b)(\exists C)(\forall z)[z \in C \Leftrightarrow (z = a) \vee (z = b)]$$

Ak  $a, b$  sú množiny, tak existuje množina ktorá obsahuje práve prvky  $a, b$  a žiadne iné. Túto množinu označíme  $\{a, b\}$ .



## Axiómy systému ZFC

### Tvrdenie

*Pre ľubovoľné množiny  $A, B$  existuje taká množina  $C$ , do ktorej patria práve prvky patriace do množiny  $A$  alebo do množiny  $B$ . Túto množinu označujeme  $A \cup B$  a nazývame zjednotenie množín  $A$  a  $B$ .*

### Tvrdenie

*Pre každú množinu  $a$  existuje jediná množina  $A$ , ktorá obsahuje  $a$  ako jediný svoj prvok, t.j.*

$$z \in A \Leftrightarrow z = a.$$

*Túto množinu označujeme  $\{a\}$ .*

## Axiómy systému ZFC

### Axióma V (Schéma axióm vymedzenia)

Nech  $\varphi(x)$  je formula teórie množín, ktorá neobsahuje  $B$  ako voľnú premennú. Potom platí

$$(\forall A)(\exists B)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow z \in A \wedge \varphi(z))$$

Pre každú množinu  $A$  existuje množina  $B$  obsahujúca práve tie prvky  $z \in A$ , pre ktoré je pravdivý výrok  $\varphi(z)$ , ktorý dostaneme nahradením všetkých voľných výskytov premennej  $x$  premennou  $z$ . Túto množinu budeme označovať

$$B := \{x \in A; \varphi(x)\}.$$

## Axiómy systému ZFC

### Tvrdenie

*Existuje (práve jedna) množina  $\emptyset$  s vlastnosťou*

$$(\forall z)(z \notin \emptyset).$$

*Túto množinu nazývame prázdna množina.*

### Tvrdenie

*Pre ľubovoľné dve množiny  $A$ ,  $B$  existuje práve jedna množina  $C$ , ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria súčasne do  $A$  aj do  $B$ . Túto množinu nazývame prienik množín  $A$  a  $B$  a označujeme ju  $A \cap B$ .*

## Axiómy systému ZFC

### Axióma VI (Axióma potenčnej množiny)

$$(\forall A)(\exists P)(\forall z)(z \in P \Leftrightarrow z \subseteq A)$$

Pre každú množinu  $A$  existuje množina  $P$  pozostávajúca práve z podmnožín množiny  $A$ .

#### Definícia

Množinu všetkých podmnožín množiny  $A$  nazývame *potenčná množina* množiny  $A$  a označujeme  $\mathcal{P}(A)$ .

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$

## Axiómy systému ZFC

### Axióma VIII (Schéma axióm substitúcie)

Nech  $\varphi(x, y)$  je formula teórie množín, ktorá neobsahuje  $B$  ako voľnú premennú. Potom platí

$$(\forall A)[(\forall x \in A)(\exists! y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists B)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, z))].$$

Trochu nepresne sa dá preformulovať tak, že ak  $A$  je množina a  $f: A \rightarrow Y$  je zobrazenie na množine  $A$ , tak existuje množina  $\{f(a); a \in A\}$ , čiže obraz množiny  $A$ .

## Axiómy systému ZFC

### Axióma (Axióma regularity)

$$(\forall A)[(\exists B)(B \in A) \Rightarrow (\exists B \in A) \neg [(\exists c)(c \in A \wedge c \in B)]]$$

Každá neprázdna množina obsahuje množinu, ktorá je s ňou disjunktná.

Z axiómy regularity sa dá odvodiť, že  $(\forall x)x \notin x$ .

### Axióma X (Axióma nekonečnej množiny)

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)]$$

## Axiómy systému ZFC

Doteraz uvedené axiómy sa zvyknú označovať ako axiomatický systém ZF. Po pridaní nasledujúcej axiómy už dostaneme celý systém ZFC.

### Axióma VIII (Axióma výberu)

$$(\forall \mathcal{S}) [ ((\forall A \in \mathcal{S})(A \neq \emptyset) \wedge (\forall A \in \mathcal{S})(\forall B \in \mathcal{S})(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset)) \Rightarrow (\exists V)(\forall A \in \mathcal{S})(\exists x)(V \cap A = \{x\}) ]$$

Ak  $\mathcal{S}$  je systém neprázdnych disjunktných množín, tak existuje množina  $B$ , ktorá má s každou z týchto množín jednoprvkový prienik.

## Axiómy systému ZFC

Axiómu výberu môžeme ekvivalentne preformulovať takto:

### Axióma VIII

Ak  $\mathcal{S}$  je systém neprázdnych disjunktných množín, tak existuje zobrazenie  $f: \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$  také, že pre každé  $A \in \mathcal{S}$  platí  $f(A) \in A$ .

Dokonca platí, že axióma výberu je ekvivalentná s tvrdením, ktoré dostaneme ak v predchádzajúcej formulácii vynecháme podmienku disjunktnosti.



## Definície

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

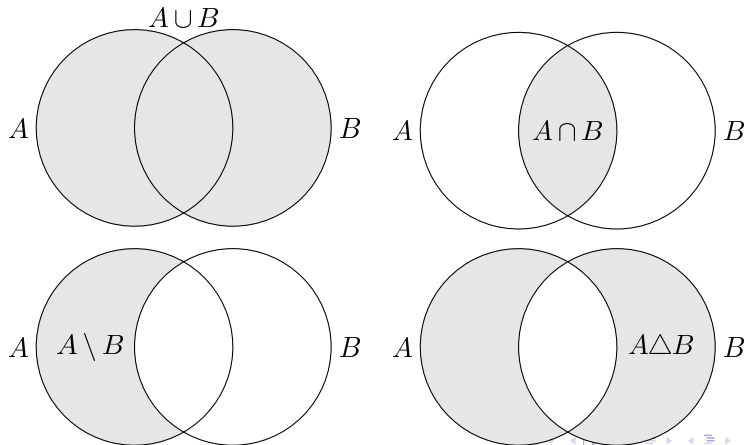
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

## Vennove diagramy



## Vlastnosti inklúzie

### Tvrdenie

*Nech  $A, B, C$  sú ľubovoľné množiny. Potom platí:*

- ▶ *Pre každú množinu platí  $A \subseteq A$ .*
- ▶  *$A = B$  práve vtedy, keď  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ .*
- ▶ *Ak platí  $A \subseteq B$  a  $B \subseteq C$ , tak  $A \subseteq C$ .*

## Identity pre $\cup$ a $\cap$

### Tvrdenie

Nech  $A, B, C$  sú množiny. Potom platí:

- (i)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$   
(asociatívnosť operácií  $\cup$  a  $\cap$ );
- (ii)  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$  (komutatívnosť operácií  $\cup$  a  $\cap$ );
- (iii)  $\emptyset \cup A = A, \emptyset \cap A = \emptyset$ ;
- (iv)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (distributívnosť);
- (v)  $A \cap A = A, A \cup A = A$  (idempotentosť operácií  $\cup$  a  $\cap$ );
- (vi)  $A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$  (zákony absorpcie).

## Zjednotenie a prienik systému množín

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\exists A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{z; (\exists i \in I) z \in A_i\}$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\forall A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{z; (\forall i \in I) z \in A_i\}$$

$\bigcap \mathcal{S}$  definujeme len pre  $\mathcal{S} \neq \emptyset$

## Zjednotenie a prienik systému množín

### Tvrdenie

*Nech  $S$  a  $B$  sú ľubovoľné množiny. Potom platí:*

$$B \cap \bigcup_{A \in S} A = \bigcup_{A \in S} (B \cap A); \quad B \cup \bigcap_{A \in S} A = \bigcap_{A \in S} (B \cup A).$$

## Inklúzia, prienik a zjednotenie

### Tvrdenie

*Nech  $A$  a  $B$  sú množiny. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (i)  $A \subseteq B$ ;
- (ii)  $A = A \cap B$ ;
- (iii)  $B = A \cup B$ .

### Tvrdenie

*Nech  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sú množiny. Potom platí:*

- (i)  $\emptyset \subseteq A$ ;
- (ii)  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ;
- (iii) *Ak  $A \subseteq B$ , tak  $A \cap C \subseteq B \cap C$  a  $A \cup C \subseteq B \cup C$ .*

## Identy pre množinový rozdiel

- (i)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$   
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$
- (ii)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C;$
- (iii)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$
- (iv)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$   
 $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$
- (v)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B);$
- (vi)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = A \cap (C \setminus B);$
- (vii)  $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C);$



## Identity pre množinový rozdiel

$$(viii) A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B);$$

$$(ix) A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset.$$

$$(x) A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i), \quad A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

$$(xi) \text{ Ak } B \subseteq C, \text{ tak } A \setminus C \subseteq A \setminus B.$$

$$(xii) \text{ Ak } B \subseteq C, \text{ tak } B \setminus A \subseteq C \setminus A.$$

## Identity pre symetrickú diferenciu

### Tvrdenie

*Nech  $A, B, C$  sú množiny. Potom platí:*

- (i)  $A \Delta B = B \Delta A$ ;
- (ii)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ ;
- (iii)  $A \Delta A = \emptyset$ ,  $A \Delta \emptyset = A$ ;
- (iv)  $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$ ;
- (v)  $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$ .

## Usporiadaná dvojica

### Definícia

Nech  $a, b$  sú množiny. Potom množinu

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

nazývame *usporiadanou dvojicou* množín  $a$  a  $b$ .

### Tvrdenie

Nech  $a, b, c, d$  sú množiny. Potom

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d.$$

## Karteziánsky súčin

### Definícia

Karteziánsky súčin množín  $A$  a  $B$  je množina, ktorej prvkami sú práve také usporiadané dvojice, kde prvý prvok patrí do množiny  $a$  a druhý prvok patrí do množiny  $b$ . Túto množinu označujeme

$$A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

## Karteziánsky súčin

### Tvrdenie

*Nech  $A, B, C$  sú množiny. Potom platí*

- (i)  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ ;
- (ii)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ;
- (iii)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ;
- (iv)  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ .
- (v) *Ak navyše  $A, B, C, D \neq \emptyset$ , tak platí*  
 $A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$

Karteziánsky súčin vo všeobecnosti nie je asociatívny ani komutatívny:

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$