Relácie a funkcie

29. septembra 2012

Relácie

Definícia

Relácia R medzi množinami A a B je ľubovoľná podmnožina množiny $A \times B$. Pokiaľ $A = B$, hovoríme o relácii na množine A. Obvykle namiesto $(a, b) \in R$ používame zápis aRb.
Definičný obor: $D(R) = \{a \in A; (\exists b \in B) aRb\}$
Obor hodnôt: $H(R) = \{b \in B; (\exists a \in A) aRb\}$

Príklady:

- $id_A = \{(a, a); a \in A\}$ na množine A
- $R = \{(x, y) \in I \times I; x^2 + y^2 = 1\}$ na množine $I = \langle -1, 1 \rangle$
- $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; a \leq b\}$ na množine $\mathbb{N}$

Relácie

Definícia

Nech A je množina a R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je:

(i) *reflexívna,* ak pre každé $a \in A$ platí aRa,

(ii) *ireflexívna* (*antireflexívna*), ak pre žiadne $a \in A$ neplatí aRa,

(iii) *symetrická,* ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí $aRb \Rightarrow bRa$,

(iv) *antisymetrická,* ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,

(v) *asymetrická,* ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí $aRb \Rightarrow \neg(bRa)$,

(vi) *tranzitívna,* ak $\forall a, b, c \in A$ platí $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,

(vii) *trichotomická,* ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí práve jedna z možností aRb, bRa, $a = b$.

Relácia ekvivalencie

Definícia

Relácia R na množine A sa nazýva *relácia ekvivalencie* ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Viete: relácie ekvivalencie zodpovedajú rozkladom.

Čiastočné usporiadanie

Definícia

Relácia R na množine A sa nazýva *čiastočné usporiadanie* na množine A, ak relácia R je reflexívna, tranzitívna a antisymetrická. Hovoríme tiež, že dvojica (A, R) je *čiastočne usporiadaná množina*. Ak sú navyše ľubovoľné dva rôzne prvky množiny A *porovnateľné* reláciou R, t.j. platí

$$(\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa,$$

nazývame túto reláciu *lineárnym usporiadaním*.

Skladanie relácií

Definícia

Nech R je relácia medzi množina A, B a S je relácia medzi množinami B, C. Potom reláciu

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C; (\exists b \in B) aRb \wedge bSc\}$$

nazývame *zložením relácií A a B*.

Reláciu
$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A; (a, b) \in R\}$$

medzi množinami B a A nazývame *inverznou reláciou* k relácii R.

Skladanie relácií

Tvrdenie

Ak R je ľubovoľná relácia medzi množinami A, B, tak platí

$$(R^{-1})^{-1} = R.$$

Definícia

Nech A je množina. Potom reláciu

$$id_A = \{(a, a); a \in A\}$$

na množine A nazývame *identita* na množine A.

Skladanie relácií

Tvrdenie

Nech A, B sú množiny R je relácia medzi množinami A, B a S je relácia medzi množinami B, A. Potom platí

$$R \circ id_A = R$$
$$id_A \circ S = S.$$

Tvrdenie

Nech R je relácia medzi množina A a B, S je relácia medzi množinami B a C. Potom platí:

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Skladanie relácií

Tvrdenie

Nech R je relácia na množine A. Potom platí:

(i) *relácia R je reflexívna práve vtedy, keď $id_A \subseteq R$;*

(ii) *relácia R je symetrická práve vtedy, keď $R^{-1} = R$;*

(iii) *relácia R je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$;*

(iv) *relácia R je tranzitívna práve vtedy, keď $R \circ R \subseteq R$;*

Tvrdenie

Ak R je čiastočné usporiadanie na množine A, tak aj R^{-1} je čiastočné usporiadanie na A.
Ak navyše R je lineárne, tak to isté platí aj o usporiadaní R^{-1}.

Funkcie

Definícia

Zobrazenie (*funkcia*) z množiny A do B je relácia medzi množinami A a B taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ s vlastnosťou $(a, b) \in f$.

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a, b) \in f$$

Zobrazenie f z A do B budeme označovať $f\colon A \to B$. Množinu A nazývame *definičný obor* a B *obor hodnôt* zobrazenia f.

Namiesto zápisu $(a, b) \in f$ budeme používať zápis $f(a) = b$.

Skladanie zobrazení

Definícia

Ak $f: A \to B$ je zobrazenie a $C \subseteq A$, tak zobrazenie $f|_C: C \to B$, definované predpisom

$$f|_C(x) = f(x)$$

pre všetky $x \in C$, nazývame *zúženie zobrazenia* f na množinu C.

$$f|_C = f \cap (C \times B)$$

Tvrdenie

Nech $f: A \to B$, $g: B \to C$ sú zobrazenia. Potom aj $g \circ f$ je zobrazenie

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \text{ pre každé } a \in A.$$

Injekcia, bijekcia a surjekcia

Definícia

Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie.

- f je *injektívne,* ak $(\forall x, y \in X)\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- f je *surjektívne,* ak $(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ f(x) = y$.
- f je *bijektívne,* ak je súčasne injektívne aj surjektívne.

Zloženie dvoch injekcií (surjekcií, bijekcií) je opäť injekcia (surjekcia, bijekcia).

Poznámka

Ekvivalentná definícia injekcie: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f: A \to B$ je zobrazenie. Potom f^{-1} je zobrazenie z B do A práve vtedy, keď f je bijekcia.

Tvrdenie

Nech $f: A \to B$, $g: B \to A$ sú zobrazenia. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) $g = f^{-1}$ *(t.j. g je inverzné zobrazenie k f);*

(ii) *platí $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$.*

Vzor a obraz množiny

Definícia

Nech $f: X \to Y$ je zobrazenie, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.
Potom množinu

$$f[A] := \{f(a); a \in A\}$$

nazývame *obraz množiny A* v zobrazení f a množinu

$$f^{-1}[B] = \{a; f(a) \in B\}$$

nazývame *vzor množiny B* v zobrazení f.

Vzor a obraz množiny

$$x \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A) x = f(a)$$
$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

V prípade, že $B = \{b\}$ je jednoprvková množina, niekedy namiesto zápisu $f^{-1}[\{b\}]$ použijeme zápis $f^{-1}(b)$. (Z kontextu by malo byť zrejmé, či hovoríme o inverznej funkcii k f, alebo zápis $f^{-1}(b)$ znamená vzor jednoprvkovej množiny.)

Vzor a obraz množiny

Tvrdenie

Nech $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *sú zobrazenia,* $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$, $E \subseteq Z$, $A_i \subseteq X$ *a* $B_i \subseteq Y$ *pre každé* $i \in I$. *Potom platí*

(i) $g \circ f[A] = g[f[A]]$;

(ii) $(g \circ f)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]]$;

(iii) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ *a ak* f *je injektívne, tak* $A = f^{-1}[f[A]]$;

(iv) $f[f^{-1}[C]] \subseteq C$ *a ak* f *je surjektívne, tak* $f[f^{-1}[C]] = C$;

(v) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ *a ak* f *je injektívne, tak* $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$;

(vi) $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$ *a ak* f *je injektívne, tak* $f[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f[A_i]$;

Tvrdenie

(vii) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$;

(viii) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$;

(ix) $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$;

(x) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$;

(xi) $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$;

(xii) $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$;

(xiii) $A \subseteq B \Rightarrow f[A] \subseteq f[B]$ *a ak* f *je injekcia, tak platí aj opačná implikácia;*

(xiv) $C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$ *a ak* f *je surjekcia, tak platí aj opačná implikácia;*

(xv) $f[A] \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}[C]$.

Surjekcia a pravé inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie. Potom platí:

(i) *f je surjekcia práve vtedy, keď existuje zobrazenie $g\colon B \to A$ také, že $f \circ g = id_B$.*

(ii) *Nech navyše $A \neq \emptyset$. Potom f je injekcia práve vtedy, keď existuje zobrazenie $g\colon B \to A$ také, že $g \circ f = id_A$.*

Dôsledok

Ak $A \neq \emptyset$ a existuje injekcia $f\colon A \to B$, tak existuje surjekcia $f\colon B \to A$.

Karteziánsky súčin systému množín

Definícia

Ak A, B sú ľubovoľné množiny, tak zobrazenia $p_1 : A \times B \to A$ a $p_2 : A \times B \to B$, dané predpismi

$$p_1(a, b) = a$$
$$p_2(a, b) = b$$

pre $(a, b) \in A \times B$, budeme nazývať *projekcie* z karteziánskeho súčinu $A \times B$ na množiny A a B.

Karteziánsky súčin systému množín

Definícia

Nech I je množina a pre každé $i \in I$ je A_i množina. Potom *karteziánsky súčin* systému množín A_i, $i \in I$ definujeme ako

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i ; f(i) \in A_i\}$$

Pre každé $i \in I$ definujeme zobrazenie $p_i \colon \prod_{i \in I} A_i \to A_i$

$$p_i(f) = f(i),$$

ktoré nazývame *i-ta projekcia.*

Karteziánsky súčin funkcií

Definícia

Nech $f : A \to C$, $g : B \to D$ sú zobrazenia. Potom ich *karteziánsky súčin* je zobrazenie $f \times g : A \times B \to C \times D$ určené predpisom

$$f \times g(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Ak pre každé $i \in I$ je $f_i : A_i \to B_i$ zobrazenie, tak karteziánsky súčin týchto zobrazení je $g = \prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$, kde $g(f)$ pre $f \in \prod_{i \in I} A_i$ je určená ako

$$g(f)(i) = f_i(f(i)).$$

Karteziánsky súčin funkcií

Tvrdenie

Nech $f : A \to C$, $g : B \to D$ *sú zobrazenia.*

(i) *Ak* f *aj* g *sú injekcie, tak* $f \times g$ *je injekcia.*

(ii) *Ak* f *aj* g *sú surjekcie, tak* $f \times g$ *je surjekcia.*

(iii) *Ak* f *aj* g *sú bijekcie, tak* $f \times g$ *je bijekcia.*

Tvrdenie

Nech $f_i : A_i \to B_i$ *je zobrazenie pre každé* $i \in I$.

(i) *Ak* f_i *je injekcia pre každé* $i \in I$, *tak* $\prod\limits_{i \in I} f_i$ *je injekcia.*

(ii) *Ak* f_i *je surjekcia pre každé* $i \in I$, *tak* $\prod\limits_{i \in I} f_i$ *je surjekcia.*

(iii) *Ak* f_i *je bijekcia pre každé* $i \in I$, *tak* $\prod\limits_{i \in I} f_i$ *je bijekcia.*

Čiastočné usporiadanie

reflexívna, antisymetrická a tranzitívna relácia na množine A
$(A, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina

$$(\forall a \in A) a \leq a \tag{R}$$
$$(\forall a, b \in A) a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \tag{A}$$
$$(\forall a, b, c \in A) a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \tag{T}$$

$$a < b \qquad \Leftrightarrow \qquad (a \leq b) \wedge a \neq b$$

Čiastočné usporiadanie

Lineárne usporiadanie = ľubovoľné 2 prvky množiny A sú porovnateľné

$$(\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow a \leq b \vee b \leq a.$$

Príklady:

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$
- Ak $(A, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina a $B \subseteq A$, tak $(B, \leq \cap (B \times B))$ je tiež čiastočne usporiadaná množina.
- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$
- $(\mathbb{N}, |)$

$a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{N}) b = c.a$

Hasseho diagram

Definícia

Nech $(A, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Prvok a nazývame *predchodcom* prvku b, ak $a \leq b$ a súčasne platí

$$a \leq c \leq b \qquad \Rightarrow \qquad c = a \vee c = b.$$

Prvok b sa nazýva *nasledovník* prvku a.

Diagram – čiarou spojíme prvok s jeho nasledovníkom.

Hasseho diagram

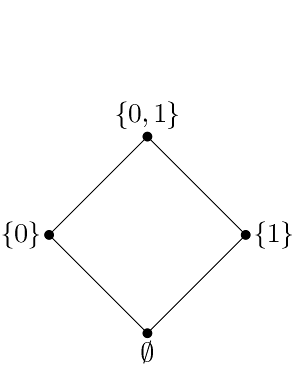


Figure: Hasseho diagram $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pre 2- a 3-prvkovú množinu

Hasseho diagram

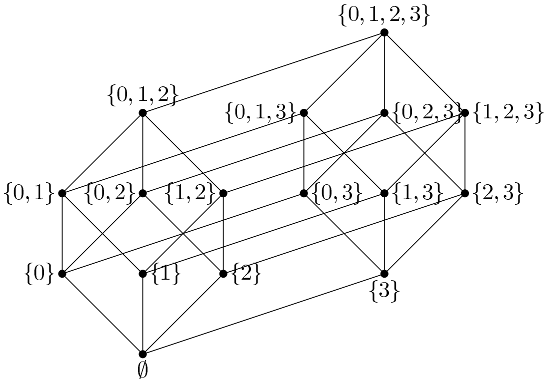


Figure: Hasseho diagram $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pre 4-prvkovú množinu

Hasseho diagram

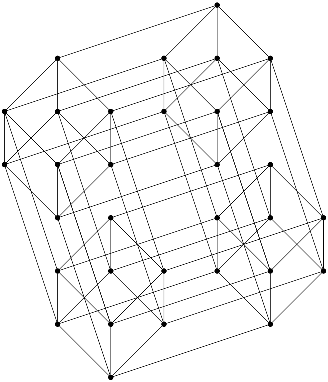


Figure: 5-rozmerná hyperkocka

Hasseho diagram

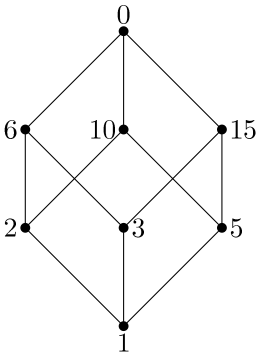


Figure: Hasseho diagram pre čiastočné usporiadanie $|$ na množine $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$

Izomorfizmus

Definícia

Nech $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ sú čiastočne usporiadané množiny a $f: X \to Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že zobrazenie f je *monotónne,* ak platí

$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \preceq f(x_2).$$

Niekedy používame aj zápis $f: (X, \leq) \to (Y, \preceq)$.
Ak je zobrazenie f navyše bijektívne a f^{-1} je tiež monotónne, tak f nazývame *izomorfizmus.* Ak existuje izomorfizmus medzi čiastočne usporiadanými množinami $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$, tak hovoríme, že $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ sú *izomorfné*, označujeme $(X, \leq) \cong (Y, \preceq)$.

Najmenší a minimálny prvok

Definícia

Nech $(A, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina a $a \in A$. Hovoríme, že a je

(i) *najmenší prvok* množiny A, ak $(\forall b \in A) a \leq b$;
(ii) *najväčší prvok* množiny A, ak $(\forall b \in A) b \leq a$;
(iii) *minimálny prvok* množiny A, ak $(\forall b \in A) b \leq a \Rightarrow b = a$;
(iv) *maximálny prvok* množiny A, ak $(\forall b \in A) a \leq b \Rightarrow a = b$.

najmenší $\Rightarrow$ minimálny
lineárne usporiadanie: najmenší $\Leftrightarrow$ minimálny

Ostré čiastočné usporiadanie

Definícia

Reláciu $<$ na množine A nazývame *ostré čiastočné usporiadanie*, ak je antireflexívna, asymetrická a tranzitívna; t.j. pre $a, b, c \in A$ platí

$$a \not< a;$$
$$a < b \Rightarrow b \not< a;$$
$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c.$$

Ak sú navyše ľubovoľné dva rôzne prvky porovnateľné, tak hovoríme o *ostrom lineárnom usporiadaní.*

$$a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a$$

Ostré čiastočné usporiadanie

Veta

Nech R je relácia na množine A.

R je čiastočné usporiadanie $\Rightarrow R \setminus id_A$ je ostré čiastočné usporiadanie
S je ostré čiastočné usporiadanie $\Rightarrow S \cup id_A$ je čiastočné usporiadanie

Priradenia $R \mapsto R \setminus id_A$ a $S \mapsto S \cup id_A$ sú navzájom inverzné (a teda). Tieto priradenia zachovávajú linearitu.

Dobre usporiadané množiny

Definícia

Nech $(A, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Hovoríme, že $(A, \leq)$ je *dobre usporiadaná množina*, resp. že $\leq$ je *dobré usporiadanie* na množine A, ak každá neprázdna podmnožina množiny A má najmenší prvok v usporiadaní $\leq$.

Definícia

Ak $(A, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina, tak symbolom A_a budeme označovať množinu všetkých prvkov menších než A.

$$A_a = \{x \in A; x < a\}$$

Indukcia v dobre usporiadanej množine

Veta (Indukcia v dobre usporiadanej množine)

Nech $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina. Nech podmnožina $B \subseteq A$ má nasledujúcu vlastnosť:

$$(\forall a \in A) A_a \subseteq B \Rightarrow a \in B.$$

Potom $B = A$.

Príklady dobre usporiadaných množín: $(\mathbb{N}, \leq)$ (a jej podmnožiny)

Lexikografické a antilexikografické usporiadanie

Definícia

Nech $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ sú čiastočne usporiadané množiny. Potom reláciu $\leq$ na množine $A \times B$ definovanú ako

$$(a, b) \leq (a', b') \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (a <_A a') \vee [(a = a') \wedge (b \leq_B b')]$$

nazývame *lexikografické usporiadanie.* Tiež hovoríme, že $(A \times B, \leq)$ je *lexikografický súčin* čiastočne usporiadaných množín $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$.

Antilexikografické usporiadanie na $A \times B$ definujeme ako

$$(a, b) \leq (a', b') \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (b <_B b') \vee [(b = b') \wedge (a \leq_B a')].$$

Lexikografické a antilexikografické usporiadanie

Tvrdenie

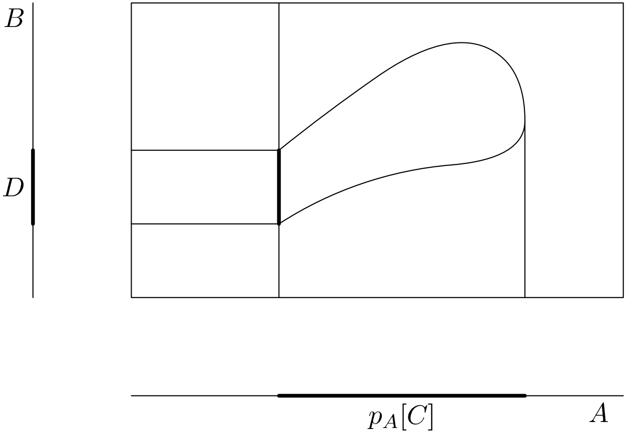
Nech $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ sú čiastočne usporiadané množiny a $(A \times B, \leq)$ je ich (anti)lexikografický súčin. Potom

(i) *$(A \times B, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina;*

(ii) *ak $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ sú lineárne usporiadané, tak aj $(A \times B, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina;*

(iii) *ak $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ sú dobre usporiadané, tak aj $(A \times B, \leq)$ je dobre usporiadaná množina.*

Lexikografické a antilexikografické usporiadanie



Súčet dobre usporiadaných množín

Príklad

Nech $(B, \leq_B)$ a $(C, \leq_C)$ sú čiastočne usporiadané množiny. Na $M := \{0\} \times B \cup \{1\} \times C$ zadefinujeme $\leq$ ako:
$(0, b) \leq (1, c)$ pre ľubovoľné $b \in B$, $c \in C$;
pre $b, b' \in B$ platí $(0, b) \leq (0, b')$ práve vtedy, keď $b \leq_B b'$;
pre $c, c' \in C$ platí $(0, c) \leq (0, c')$ práve vtedy, keď $c \leq_C c'$.
Dostaneme čiastočné usporiadanie. Ak obe množiny sú lineárne (dobre) usporiadané, platí to aj o výslednej množine.
Označenie: $(B, \leq_B) + (C, \leq_C)$ alebo $B + C$
$\{0\} + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$
$\mathbb{N} + \{0\} \ncong \mathbb{N}$
Neskôr: súčet a súčin ordinálnych čísel.

Súčet dobre usporiadaných množín

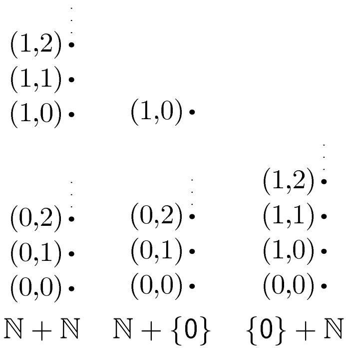


Figure: Príklady na súčet dobre usporiadaných množín

Počiatočný úsek

Definícia

Počiatočný úsek lineárne usporiadanej množiny $(X, \leq)$ je podmnožina $U \subseteq X$ s vlastnosťou $x \in U \wedge y \leq x \Rightarrow y \in U$.

X a množiny tvaru $X_a = \{x \in X; x < a\}$ pre $a \in X$

Tvrdenie

Nech $(X, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina a nech $X' = \{X_a; a \in X\}$ je množina všetkých vlastných počiatočných úsekov množiny X. Potom zobrazenie $f : X \to X'$ určené predpisom

$$f(a) = X_a$$

je izomorfizmus $(X, \leq)$ a $(X', \subseteq)$.