Konečné množiny

29. septembra 2012

Dedekindova definícia

Definícia

Množinu X budeme nazývať *D-nekonečná*, ak existuje vlastná podmnožina $Y \subsetneqq X$ taká, že $|Y| = |X|$. Ak množina X nie je D-nekonečná, voláme ju *D-konečná*.

Príklad: $\mathbb{N}$

Dedekindova definícia

Tvrdenie (ZF)

Nech X je ľubovoľná množina. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *X je D-nekonečná;*

(ii) $\aleph_0 \leq |X|$;

(iii) $|X| = |X| + 1$.

Tarskiho definícia

Definícia

Hovoríme, že množina X je *T-konečná,* ak každá neprázdna množina $\mathcal{A}$ podmnožín množiny X má minimálny prvok vzhľadom na inklúziu.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \wedge \mathcal{A} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{A})(B \in \mathcal{A} \wedge B \subseteq A \Rightarrow B = A)$$

Ak X nie je T-konečná, budeme ju volať *T-nekonečná.*

Ak nahradíme v uvedenej definícii slovo „minimálny“ slovom „maximálny“, dostaneme ekvivalentnú definíciu.
Príklad: $\mathbb{N}$

Tarskiho definícia

Lema (ZF)

(i) *Množina* $\emptyset$ *je T-konečná.*

(ii) *Ak* X *je T-konečná množina a* x *je ľubovoľná množina, tak aj* $X \cup \{x\}$ *je konečná.*

Tvrdenie (ZF)

Nech X *je ľubovoľná množina. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) X *je T-konečná;*

(ii) *ak množina* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *spĺňa podmienky*

$$\emptyset \in \mathcal{A};$$

$$A \in \mathcal{A},\ x \in X \Rightarrow A \cup \{x\} \in \mathcal{A},$$

tak $X \in \mathcal{A}$.

Podmnožina, zjednotenie

Tvrdenie (ZF)

Ak X je T-konečná množina a $Y \subseteq X$, tak aj Y je T-konečná.

Tvrdenie (ZF)

Ak X a Y sú T-konečné množiny, tak aj $X \cup Y$ je T-konečná.

Tvrdenie (ZF)

Ak $\mathcal{S}$ je T-konečný systém T-konečných množín, tak aj množina $\bigcup \mathcal{S}$ je T-konečná.

Obraz

Tvrdenie (ZF)

Obraz T-konečnej množiny je T-konečná množina, t.j. ak X je T-konečná a $f : X \to Y$ je surjekcia, tak Y je T-konečná.

Dôsledok (ZF)

Ak X je T-konečná množina a $|X| = |Y|$, tak Y je T-konečná.

Dôsledok (ZF)

Ak Y je T-konečná množina a $|X| \leq |Y|$, tak X je T-konečná.

Potenčná množina

Tvrdenie (ZF)

Ak množina X je T-konečná, tak je T-konečná aj množina $\mathcal{P}(X)$.

T-konečnosť a $\mathbb{N}$

Tvrdenie (ZF)

Nech X je ľubovoľná množina. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *X je T-konečná;*
(ii) *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *také, že* $|X| = n$*;*
(iii) *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *také, že* $|X| \leq n$*.*

T-konečnosť a $\mathbb{N}$

Lema

Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ a A je neohraničená (t.j. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists a \in A) n < a$). Potom $|A| = \aleph_0$.

Tvrdenie

Množina X je T-konečná práve vtedy, keď $|X| < \aleph_0$.

T-konečnosť a D-konečnosť

Tvrdenie (ZF)

Každá T-konečná množina je D-konečná.

Tvrdenie (AC)

Každá D-konečná množina je T-konečná.

Posledné uvedené tvrdenie neplatí v ZF.

$$|X| < \aleph_0 \qquad \vee \qquad \aleph_0 \leq |X|$$